

חידון 2



תוכן העניינים

1.	מבוא לטופולוגיה	1
2.	וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים	4
3.	וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב	25
4.	טורים עם איברים קבועים	57
5.	סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות	71
6.	טורי טיילור - מקלורן	80
7.	קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב	95
8.	פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה	122
9.	גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים	130
10.	נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות	137
11.	כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים	148
12.	נגזרת מכוונת וגרדיאנט	152
13.	פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים	157
14.	נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים	171
15.	קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים	174
16.	קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) - ריבועים פחותים	176
17.	קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')	178
18.	קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים	181
19.	קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה	183
20.	אינטגרלים כפולים	184
21.	שימושי האינטגרל הכפול	190
22.	אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)	193
23.	החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)	198

תוכן העניינים

200	24. אינטגרלים משולשים ושימושיהם
203	25. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות
207	26. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)
208	27. אינטגרלים קווים ושימושיהם
213	28. שדות משמרים - אי תלות במסלול
218	29. משפט גרין
221	30. אינטגרלים משטחיים
224	31. משפט הדיברגנץ (גאוס)
226	32. משפט סטוקס
228	33. אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)
237	34. פונקציות הומוגניות-משפט אוילר
244	35. גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר
269	36. גיאומטריה אנליטית - המעגל
288	37. גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה
298	38. גיאומטריה אנליטית - ההיפרבולה

חדוא 2

פרק 1 - מבוא לטופולוגיה

תוכן העניינים

1. מבוא לטופולוגיה.....1

מבוא לטופולוגיה

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2)$.

- מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.
- שרטטו סקיצה של הקבוצה D .
- האם הקבוצה חסומה?
- האם הקבוצה קשירה?
- רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.
- האם הקבוצה פתוחה?
- מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה:
- אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה.
- הערה: נקודת שפה של קבוצה נקראת גם נקודה גבולית של הקבוצה.
- האם הקבוצה סגורה?
- האם הפונקציה $f(x, y)$ חסומה בקבוצה D ?
- האם הפונקציה רציפה ב- D ?

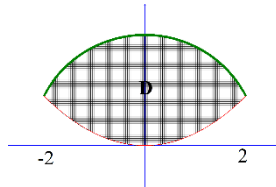
(2) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

- מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.
- שרטטו סקיצה של הקבוצה D .
- האם הקבוצה חסומה?
- האם הקבוצה קשירה?
- רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.
- האם הקבוצה פתוחה?
- מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה:
- אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה.
- האם הקבוצה סגורה?
- האם הפונקציה $f(x, y)$ חסומה בקבוצה D ?
- האם הפונקציה רציפה ב- D ?

(3) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y}$.

- א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.
- ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D .
- ג. האם הקבוצה חסומה?
- ד. האם הקבוצה קשירה?
- ה. רשמו את כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה.
- ו. האם הקבוצה פתוחה?
- ז. מהי שפת הקבוצה? רשמו שתי נקודות שפה של הקבוצה:
אחת אשר נמצאת בקבוצה ואחת אשר אינה נמצאת בקבוצה.
- ח. האם הקבוצה סגורה?
- ט. האם הפונקציה $f(x, y)$ חסומה בקבוצה D ?
- י. האם הפונקציה רציפה ב- D ?

תשובות סופיות



א. $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 5, y > \frac{1}{4}x^2 \right\}$. ב.

ג. הקבוצה חסומה. ד. הקבוצה קשירה.

ה. כל הנקודות ב-D למעט הנקודות: $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 5, -2 < x < 2\}$

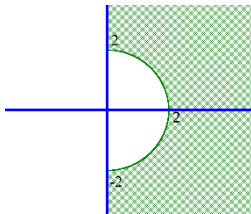
ו. הקבוצה אינה פתוחה.

ז. $\partial D = \underbrace{\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 5, -2 < x < 2\}}_C \cup \underbrace{\{(x, y) \mid 4y = x^2, -2 < x < 2\}}_E$

(0, $\sqrt{5}$) נק' שפה ששייכת לקבוצה. (0, 0) נק' שפה שאינה שייכת לקבוצה.

ח. הקבוצה אינה סגורה. ט. הפונקציה לא חסומה בקבוצה.

י. הפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה.



א. $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0\}$. ב.

ג. הקבוצה לא חסומה. ד. הקבוצה קשירה.

ה. כל הנקודות ב-D למעט הנקודות $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, -2 < y < 2\}$

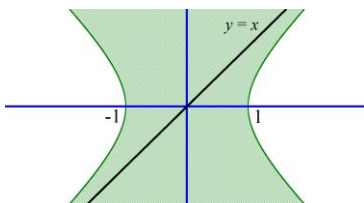
ו. הקבוצה איננה פתוחה.

ז. $\partial D = \underbrace{\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, -2 < y < 2\}}_C \cup \underbrace{\{(x, y) \mid x = 0, |y| > 2\}}_E$

(2, 0) נק' שפה ששייכת לקבוצה. (0, 3) נק' שפה שאינה שייכת לקבוצה.

ח. הקבוצה אינה סגורה. ט. הפונקציה לא חסומה בקבוצה D.

י. הפונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה.



א. $D = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x\}$. ב.

ג. הקבוצה לא חסומה. ד. הקבוצה לא קשירה.

ה. כל הנקודות ב-D פנימיות למעט הנקודות: $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1 \text{ or } y = x\}$

ו. הקבוצה איננה פתוחה.

ז. $\partial D = \underbrace{\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1\}}_C \cup \underbrace{\{(x, y) \mid y = x\}}_E$

(0, 0) נק' שפה ששייכת לקבוצה. (-1, 0) נק' שפה שאינה שייכת לקבוצה.

ח. הקבוצה אינה סגורה. ט. הפונקציה $f(x, y)$ לא חסומה בקבוצה D.

י. הפונקציה היא פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה בכל תחום הגדרתה.

חדוא 2

פרק 2 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

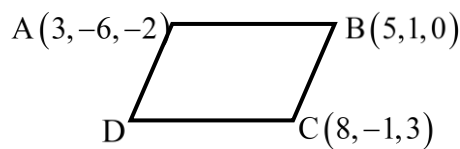
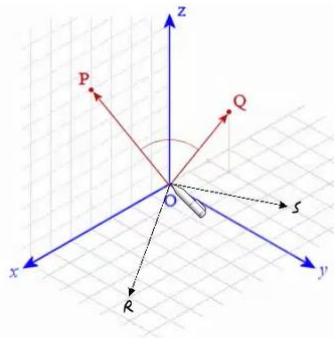
1. וקטורים 4
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת 11
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב 13
4. פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי 14
5. גרדינט, דיברגנץ ורוטור 23

וקטורים

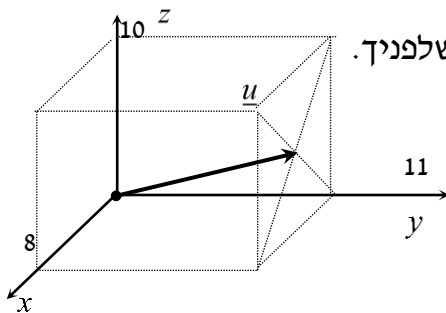
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\vec{u}$, $\vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

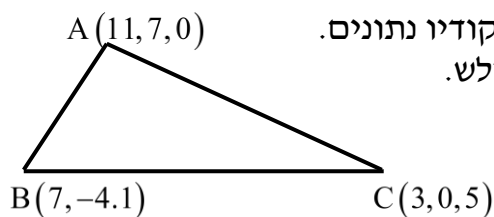
- (1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ שבאיור.
הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצאו את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



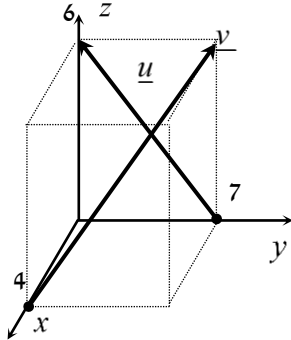
- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2, 0, -3)$ ו- $F(7, -1, -3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N , אם נתונה הנקודה $M(0, -4, 1)$

והווקטור $\overrightarrow{MN} = (-1, -1, 9)$.



(6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

(7) מצאו את x , y ו- z , אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$ כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$,

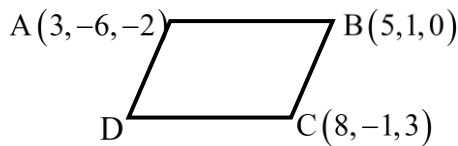
$\underline{v} = (z - 2, y + 1, x - 3)$.

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1, 0, 2)$, $B(3, 7, -4)$, $C(6, 9, 0)$, $D(7, 4, 10)$, $E(9, 11, 4)$

א. הראו כי $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$? נמקו.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

שיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצאו את שיעורי הקדקוד D .

* אין להיעזרו בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים $\underline{u} = (-3, 1, 4)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$ ו- $\underline{w} = (2, 6, -5)$.
 * בשאלות 13, 14, ו-16 הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו :

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשבו :

א. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12) $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13) $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14) $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15) $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16) $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$, ויש למצוא את הווקטורים :

(17) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

(18) $2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$

(19) $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$.

הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

(21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$$A(1, 2, 0), B(-2, 5, 3), C(-1, 8, 4), D(4, 3, -1)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

(22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5), \underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1), \underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3), \underline{v} = (4, -2, -6)$

(23) מצאו את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם :

$$A(-3, 2, 1), B(0, 3, 2), C(5, -1, 0)$$

(24) נתונים הווקטורים $\underline{u} = (2, -1, 0), \underline{v} = (5, 0, 3)$.

מצאו וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0,

אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

(25) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3, 2, 1)$ ו- $(1, -1, 2)$,

ושמרחקו מהווקטור $(1, 1, 0)$ הוא $\sqrt{3}$.

(26) ענו על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}|$.

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2$.

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

(27) הוכיחו :

א. $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ב. $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ג. $(\underline{u} - \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) = |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2$

ד. $|\underline{u} + \underline{v}|^2 + |\underline{u} - \underline{v}|^2 = 2|\underline{u}|^2 + 2|\underline{v}|^2$

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. $\frac{1}{4}(|\underline{u} + \underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

(28) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה. נגדיר $a = u - 2v$, $b = 3u + v$.
 אם α היא הזווית בין a ל- b , אז $\cos \alpha$ שווה ל-?

(29) יהיו $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k .
 יהי $v = \alpha w_1 + \frac{3}{4} w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1 .
 מהו המרחק של v מ- w_1 ?

(30) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u - v\| = 2$.
 הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \vec{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left(\frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad (22)$$

$$S_{\triangle ABC} = 10.173 \quad \text{יח"ש.} \quad (23)$$

$$(-3, -6, 5) \quad (24)$$

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{or} \quad v = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (25)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (26)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{50}} \quad (28)$$

$$(29) \quad \frac{5}{4}k$$

(30) שאלת הוכחה.

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

(1) נתון: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 חשבו: $(u \times v) \times w$.

(2) חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $A = (8, 2, 3)$, $B(4, -1, 2)$, $C(-8, 0, 4)$.

(3) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.
 ידוע כי $|u| \neq 0$, $u \cdot w = 0$, $u \times v = 0$,
 הוכיחו כי $v \cdot w = 0$.

(4) נתונים שני וקטורים u, v במרחב.
 ידוע כי $|v| = 4$, $|u| = 1$, $u \perp v$
 חשבו $|(u+v) \times (u-v)|$.

(5) נתון $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$
 חשבו:

א. $u \cdot (v \times w)$ ב. $v \cdot (w \times u)$ ג. $(u \times v) \cdot w$

(6) חשבו את נפח:

א. המקבילון שקדקודיו $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(3, 0, 2)$, $D(4, 1, 1)$.

ב. הפירמידה שקדקודה $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(3, 0, 2)$, $D(4, 1, 1)$.

(7) חשבו את נפח הפירמידה שקדקודה $A(2, 2, 5)$, $B(1, -1, -4)$, $C(3, 3, 10)$, $D(8, 6, 3)$.

(8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים a, b, c . הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $a, a-b, a+b-4c$, שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

(9) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב. הוכיחו כי $[(u+v) \times (v+w)](u+w) = 2w \cdot (u \times v)$.

(10) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.

$$u \cdot (v \times w) = 4$$

חשבו:

$$\text{א. } u \cdot (w \times v) \quad \text{ב. } (v \times w) \cdot u \quad \text{ג. } w \cdot (u \times v) \quad \text{ד. } v \cdot (u \times w)$$

(11) נתונים שלושה וקטורים a, b, c במרחב.

מהי הנוסחה עבור $a \times b \times c$?

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$S = 22.5 \quad (2)$$

(3) שאלת הוכחה.

$$8 \quad (4)$$

$$\text{א. } -3 \quad \text{ב. } -3 \quad \text{ג. } -3 \quad (5)$$

$$\text{א. } 6 \quad \text{ב. } 1 \quad (6)$$

$$9\frac{1}{3} \quad (7)$$

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

$$\text{א. } -4 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } 4 \quad \text{ד. } 4 \quad (10)$$

(11) אין לו נוסחה.

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

- (1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
 $A = (1, 2, 1)$, $B(1, 1, 1)$, $C = (2, 1, 2)$, $D(2, 2, 2)$

- (2) מצאו את מרחק הנקודה $A(3, -2, 1)$ מהישר $L: (-10, 8, -8) + t(2, -1, 2)$.

- (3) נתונים שני ישרים:

$$L_1: \frac{x-2}{2} = 3-y = \frac{z-4}{3}, \quad L_2: x+7 = y-5, z=3$$

- א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
 ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.

- (2) $\sqrt{26}$

- (3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$,

$$\text{כאשר } r(t) = (\cos \pi t, -\ln t, \sqrt{t-2}) \text{ ו- } t_0 = 4.$$

ב. רשמו את המשוואות הפרמטריות $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \cos^2 t$ כפונקציה וקטורית.

ג. רשמו את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה) הווקטורית $r(t) = (t, t^2, t^3)$.

(2) רשמו את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

$$\begin{cases} -x + y - z + 1 = 0 \\ 4x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. } 9x^2 + 4y^2 = 36 \quad (\text{במישור } xy)$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = y + 2 \end{cases} \quad \text{ד.} \quad \begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} z = x^2 + 4y^2 \\ z = 2x \end{cases} \quad \text{ו.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = x^2 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

(3) נתונה פונקציה וקטורית $r(t) = (21t^2, 21t^2 - 1, 10e^t)$.

בסעיפים א-ג, חשבו:

$$\text{א. } \lim_{t \rightarrow 1} r(t)$$

$$\text{ב. } r'(t)$$

$$\text{ג. } \int_0^1 r(t) dt$$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב- $t=1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

(4) נתונה: $r(t) = (\cos 4t, \sin 4t, t^4)$.

א. חשבו: $\frac{dr}{dt}$, $\left| \frac{dr}{dt} \right|$, $\frac{d|r'|}{dt}$.

ב. הוכיחו שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

(5) נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$.

א. גזרו את הפונקציה.

ב. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t) = (\sin 4t, te^t, t^4)$ ב- $t = 0$.

ג. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases} y^2 = z \\ x^2 = y \end{cases}$ בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצאו משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t) = (\sin t, e^{2t}, t^2)$ ב- $t = 0$.

(6) נתונה העקומה $r(t) = (t^2, t, 5)$.

א. מצאו נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור

$$x - 6y + 4z - 3 = 0$$

ב. מצאו משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t) = (3\sin t, -2\cos t, t)$,

$$t = 0.5\pi$$

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

(7) נתון $r(t) = (3\sin t, 3\cos t, 4t)$.

חשבו את משיק היחידה (T), נורמל היחידה (N) והבינורמל (B) של r.

(8) תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכיחו שאם $|r(t)|$ קבוע לכל t, אז $r(t) \cdot r'(t) = 0$.

כלומר, $r(t)$ ו- $r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכיחו שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

(9) נתונה פונקציה וקטורית $r(t) = (t, t^2, t^3)$.

מצאו את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק,

המתאימים ל- $t = 2$.

10 נתון $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית,

הוכיחו כי $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

11 חלקיק נע לאורך עקום מרחבי $x = t^3 + 2t$, $y = -3e^{-2t}$, $z = 2\sin 5t$

עבור החלקיק, בזמן $t = 0$, חשבו את:

א. המהירות.

ב. גודל המהירות.

ג. התאוצה.

ד. גודל התאוצה.

ה. הזווית בין וקטורי המהירות והתאוצה.

12 נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\vec{k}$

כאשר $\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = (v_{01}, v_{02}, v_{03})$ המהירות ההתחלתית.

מצאו את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

13 חלקיק נע על העקומה $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$.

א. חשבו את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע t .

ב. שרטטו את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע $t = 0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.

ג. הראו שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

14 מהירות $v(t)$ של חלקיק נתונה על ידי $v(t) = (2, -1, -10t)$.

ברגע $t = 0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0) = (0, 0, 100)$.

מצאו את משוואת התנועה של החלקיק $r = r(t)$.

15 תאוצה $a(t)$ של חלקיק, נתונה על ידי $a(t) = (18\cos 3t, -18\sin 3t, 0)$.

ברגע $t = 0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0) = (2, 0, 1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי)

ובמהירות $v(0) = (0, 2, 4)$.

מצאו את משוואת התנועה של החלקיק $r = r(t)$.

16 וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t) = (2t^2 - 5t + 3, t - 5, t^2 - 3)$. עבור איזה ערך של t גודל המהירות של החלקיק יהיה מינימאלי ומהו גודל המהירות המינימאלי של החלקיק.

17 ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הנקודה על המסלול $r(t) = (t^2 - 5t)\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$ שבה וקטורי המהירות והתאוצה ניצבים זה לזה.

ב. וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j}$. הראו שהזווית בין $v(t)$ ו- $a(t)$ קבועה ומצאו את הזווית הזו.

18 הוכיחו: אם המהירות של חלקיק קבועה בגודלה אז וקטורי המהירות והתאוצה שלו ניצבים זה לזה.

19 חשבו את העקמומיות ורדיוס העקמומיות של העקום $r(t) = (t^2, 0, t)$.

20 וקטור המהירות של חלקיק נתון על ידי $v(t) = (2, -1, -10t)$. מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (המצב) של החלקיק ברגע $t = 1$.

21 וקטור התאוצה של חלקיק נתון על ידי $a(t) = (8 \cos 4t, 8 \sin 4t, 0)$. ברגע $t = 0$ החלקיק נמצא במהירות $v(0) = (0, 2, 4)$. מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (וקטור המצב) של החלקיק ברגע $t = \frac{\pi}{4}$.

22 העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה (a, b) ורדיוס R .
א. מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום C .
ב. הוכיחו שמעגל העקמומיות של העקום מתלכד עם העקום.
כלומר, הוכיחו שמרכזו של מעגל העקמומיות הוא (a, b) ורדיוס R .

23 נתון העקום $r(t) = (4 \cos t, 3 \sin t)$ כאשר $0 \leq t \leq 2\pi$.
באילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מקסימלית ובאילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מינימלית. באילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מקסימלי ובאילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מינימלי. מצאו את מעגלי העקמומיות בנקודות לעיל. הדגימו את כל התוצאות באיור.

(24) נתון העקום $r(\theta) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta)$.

הוכיחו שבכל נקודה על העקום רדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

(25) נתונה עקומה במרחב דו-ממדי, שהיא גרף של פונקציה $y = f(x)$.

הראו שהעקמומיות היא
$$\kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{\left(1 + (y'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

(26) נתון העקום $y = \frac{1}{x}$.

- מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום.
- מצאו על העקום את הנקודה בה רדיוס העקמומיות מינימלי. מהו רדיוס זה?
- מצאו את מעגל העקמומיות שמתאים לנקודה שנמצאה בסעיף ב.

(27) מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום $x^4 + y^4 = 2$ בנקודה $(1,1)$. הדגימו באיור את התוצאה שקיבלת. מהו מרכז העקמומיות ומהי משוואת מעגל העקמומיות בנקודה הנ"ל?

(28) נתונה הפרבולה $y^2 = 8x$.

- מצאו את הנקודות על הפרבולה בהן רדיוס העקמומיות שווה ל- $\frac{125}{16}$.
- מצאו את מעגל העקמומיות עבור הנקודה ברביע הראשון שנמצאה בסעיף א'.

(29) העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה (a,b) ורדיוס R. מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום.

(30) נתון העקום $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$ בנקודה $\theta = \pi/6$:

- חשבו את רדיוס העקמומיות.
- מצאו את משוואת מעגל העקמומיות/נישוק.
- הוכיחו שרדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

(31) עקומה מישורית מיוצגת על ידי $r(t) = (x(t), y(t))$.

$$\kappa(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

הראו שהעקמומיות היא

(32) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את רדיוס העקמומיות של $x = a \cos t, y = b \sin t$ ב- $t = 0$

וב- $t = \pi/2$.

ב. הציבו $a = 3, b = 2$ ותנו פירוש גיאומטרי לתוצאה מסעיף א.

במיוחד מצאו את מרכז העקמומיות ושרטטו את מעגלי העקמומיות.

(33) הראו שהעקמומיות של עקומה הנתונה על ידי הצגה קוטבית $r = f(\theta)$ היא

$$k(\theta) = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - r \cdot r''|}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}$$

(34) חשבו את העקמומיות של $r = 2 \sin \theta$ עבור $\theta = \pi/6$.

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

(35) חשבו את רדיוס העקמומיות של $r = 1 + \cos \theta$ עבור $\theta = \pi/2$.

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

במיוחד מצאו את מעגל העקמומיות ואת מרכז העקמומיות.

תשובות סופיות

$$r(4) = (\cos 4\pi, -\ln 4, \sqrt{2}) \quad \text{א. } 0 < t \leq 4 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \text{ב. } r(t) = (\sin t, \cos t, \cos^2 t) \\ & \text{א. } x = 2 \cos t, y = 3 \sin t \\ & r(t) = (2 \cos t, 3 \sin t) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{ג. } x = t, y = t^2, z = t^3 \\ & \text{ב. } x = 2t - 0.5, y = 3t - 1.5, z = t \\ & r(t) = (2t - 0.5, 3t - 1.5, t) \\ & \text{ד. } x = t, y = \frac{t^2}{4} - 1, z = \frac{t^2}{4} + 1 \\ & r(t) = \left(t, \frac{t^2}{4} - 1, \frac{t^2}{4} + 1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{ה. } x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 9 \cos^2 t \\ & r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 9 \cos^2 t) \end{aligned}$$

$$\text{א. } (21, 20, 10e) \quad \text{ב. } (42t, 42t, 10e^t) \quad \text{ג. } (7, 6, 10e - 10) \quad \text{ד. כן. ה. כן. } (3)$$

$$\begin{aligned} & \text{א. } \frac{dr}{dt} = (-4 \sin 4t, 4 \cos 4t, 4t^3), \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| = 4\sqrt{1+t^6}, \quad \frac{d|r|}{dt} = \frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}} \\ & \text{ב. שאלת הוכחה.} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{א. } r'(t) = (4 \cos 4t, e^t + te^t, 4t^3) \quad \text{ב. } (x, y, z) = (0, 0, 0) + s(4, 1, 0) \quad (5)$$

$$\text{ג. } (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 2, 4) \quad \text{ד. } \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$$

$$\text{א. } (9, 3, 5) \quad \text{ב. } 2y + z = 0.5\pi \quad (6)$$

$$T(t) = \frac{1}{5}(3 \cos t, -3 \sin t, 4), \quad N(t) = (-\sin t, -\cos t, 0), \quad B(t) = \frac{1}{5}(4 \cos t, -4 \sin t, -3) \quad (7)$$

שאלת הוכחה. (8)

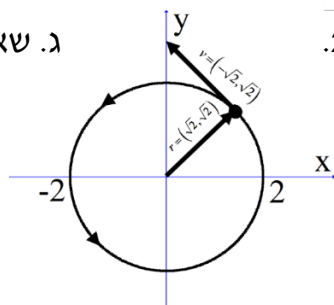
$$\begin{aligned} & \text{המישור הניצב } x + 4y + 12z = 114, \text{ מישור הנישוק } 24x - 12y + 2z = 16, \\ & \text{מישור היישור } 76x + 143y - 54z = 292. \end{aligned} \quad (9)$$

שאלת הוכחה. (10)

$$\text{א. } (2, 6, 10) \quad \text{ב. } \sqrt{140} \quad \text{ג. } (0, -12, 0) \quad \text{ד. } 12 \quad \text{ה. } 120.46^\circ \quad (11)$$

$$v(t) = (v_{01}, v_{02}, v_{03} - gt), \quad |v(t)| = \sqrt{(v_{01})^2 + (v_{02})^2 + (v_{03} - gt)^2}, \quad a(t) = (0, 0, -g), \quad |a(t)| = g \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \text{א. } v(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t) \\ & |v(t)| = 2 \end{aligned} \quad \text{ב. } \quad \text{ג. שאלת הוכחה.} \quad (13)$$



$$r(t) = (2t, -t, -5t^2 + 100) \quad (14)$$

$$r(t) = (-2 \cos 3t + 4, 2 \sin 3t - 4t, 4t + 1) \quad (15)$$

$$v_{\min} = v(1) = \sqrt{6} \quad (16)$$

$$(17) \text{ א. } \left(-\frac{19}{16}, \frac{3}{2}, \frac{3}{16}\right) \quad \text{ב. } \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

(18) שאלת הוכחה.

$$(19) \quad \kappa = \frac{2}{(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad \rho = \frac{(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

$$(20) \quad \rho = \frac{21\sqrt{21}}{2}$$

$$(21) \quad \kappa = \frac{2}{13}, \quad \rho = 6.5$$

(22) א. $\rho = R, \kappa = 1/R$. מכאן, רדיוס העקמומיות של העקום הוא קבוע ושווה ל-

$\rho = R$. ועקמומיות העקום קבועה ושווה ל- $\kappa = \frac{1}{R}$. ב. שאלת הוכחה.

(23) העקמומיות **מקסימלית** עבור $t = 0, \pi, 2\pi$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{4}{9}$

בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מינימלי** ושווה ל- $\frac{9}{4}$. עקמומיות

מינימלית עבור $t = \pi/2, 3\pi/2$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{3}{16}$ בנקודות אלה

רדיוס העקמומיות יהיה **מקסימלי** ושווה ל- $\frac{16}{3}$.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

$$(26) \text{ א. } \rho(x) = \frac{(x^4 + 1)^{\frac{3}{2}}}{2x^2 |x|}$$

ב. רדיוס העקמומיות מינימלי בנקודה (1,1) ובמקרה זה הוא $\sqrt{2}$.

$$\text{ג. } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$$

(27) רדיוס: $\frac{\sqrt{2}}{3}$; מרכז העקמומיות: $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

משוואת המעגל בנקודה: $(x-2/3)^2 + (y-2/3)^2 = 2/9$.

$$(28) \text{ א. } y = \pm 3, x = \frac{9}{8} \quad \text{ב. } (x-59/8)^2 + (y+27/16)^2 = (125/16)^2$$

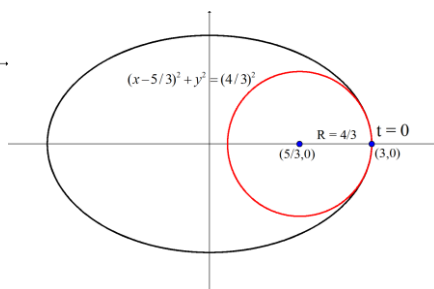
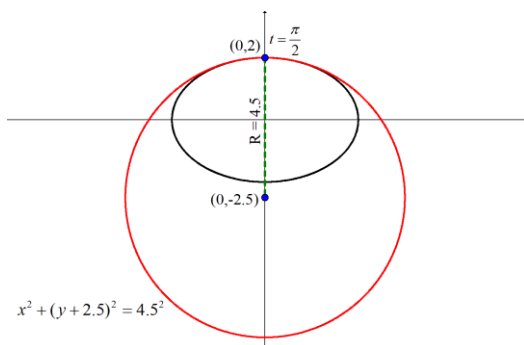
$$(29) \quad \kappa = \frac{1}{R}, \quad \rho = R$$

$$(30) \text{ א. } \rho = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \text{ב. } x^2 + (y+1)^2 = \frac{27}{16} \quad \text{ג. שאלת הוכחה.}$$

(31) שאלת הוכחה.

$$\kappa(0) = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2} \quad \kappa(\pi/2) = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2} \quad (32) \text{ א.}$$

$$\rho(0) = \frac{b^2}{a} \quad \rho(\pi/2) = \frac{a^2}{b}$$

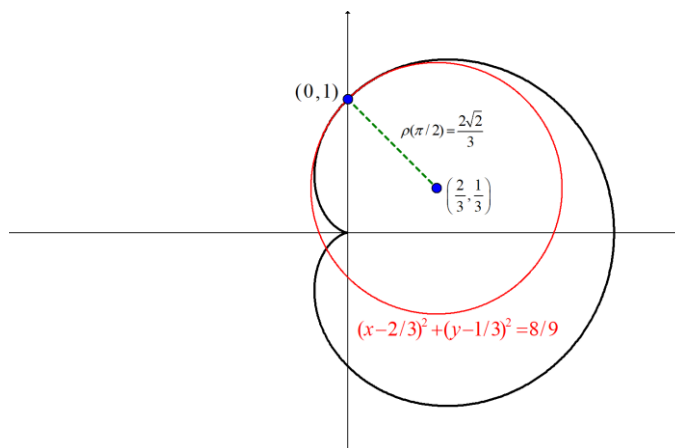


ב.

(33) שאלת הוכחה.

$$\kappa = \rho = 1 \quad (34)$$

(35) ראו שרטוט:



גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

שאלות

(1) יהיו $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ שדות וקטורים כלליים. הוכיחו:

א. $\operatorname{div}(F + G) = \operatorname{div}(F) + \operatorname{div}(G)$

ב. $\nabla(F + G) = \nabla(F) + \nabla(G)$

(2) יהי $F(x, y, z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi = \varphi(x, y, z)$ פונקציה. הוכיחו כי $\operatorname{div}(\varphi F) = (\nabla \varphi) \cdot F + \varphi \operatorname{div} F$.

(3) יהי $F(x, y, z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi = \varphi(x, y, z)$ פונקציה. הוכיחו כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

או בניסוח אחר $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$.

ב. הוכיחו כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$.

או בניסוח אחר $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$.

(4) יהיו $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ שדות וקטורים כלליים. הוכיחו כי $\operatorname{curl}(F + G) = \operatorname{curl}(F) + \operatorname{curl}(G)$.

(5) יהי $F(x, y, z)$ שדה וקטורי.

הוכיחו כי $\nabla \times (\nabla \times F) = -\nabla^2 F + \nabla(\nabla \cdot F)$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi = \varphi(x, y, z)$.

הגרדיאנט של φ המסומן $\text{grad } \varphi$ מוגדר על ידי

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$
הגדרה (דיברגנץ וקטור של שדה וקטורי)

יהי $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ מגדירים את הדיברגנץ של $\mathbf{F}$ המסומן $\text{div } \mathbf{F}$, כך:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \text{div } \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (f, g, h) \\ \text{div } \mathbf{F} &= f_x + g_y + h_z \end{aligned}$$

מגדירים את ה- curl של $\mathbf{F}$ המסומן $\text{curl } \mathbf{F}$, על ידי:

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f, g, h) \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix} \\ \text{curl } \mathbf{F} &= (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k} \end{aligned}$$

הערה: יש הרושמים $\text{rot } \mathbf{F}$ במקום $\text{curl } \mathbf{F}$.

חדוא 2

פרק 3 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

תוכן העניינים

25	1. הצגה פרמטרית של ישר
28	2. מצב הדדי בין ישרים
30	3. הצגה פרמטרית של מישור
31	4. משוואת מישור
32	5. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור
33	6. מישורים המקבילים לצירים
34	7. מצב הדדי בין ישר ומישור
35	8. מצב הדדי בין מישורים
36	9. ישר חיתוך בין מישורים
(ללא ספר)	10. חישובי זוויות שונות
37	11. זווית בין שני ישרים
38	12. זווית בין ישר ומישור
39	13. זווית בין שני מישורים
(ללא ספר)	14. חישובי מרחקים
40	15. מרחק בין שתי נקודות במרחב
41	16. מרחק בין נקודה לישר
42	17. מרחק בין נקודה למישור
43	18. מרחק בין ישרים מקבילים
44	19. מרחק בין ישר למישור
45	20. מרחק בין מישורים מקבילים
46	21. מרחק בין ישרים מצטלבים
(ללא ספר)	22. סיכום מרחקים
47	23. היטלים ונקודות סימטריה
48	24. שאלות מסכמות

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

הצגה פרמטרית של ישר

שאלות

- (1) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = (4,3,0) + t(1,-1,1)$?
- (2) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell : \underline{x} = t(2,-1,5)$?
- (3) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.
- (4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.
- (5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$ ומקביל לישר $\ell : \underline{x} = (0,3,-1) + t(-4,2,1)$.
- (6) מצאו במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$ ומאונך לישר $\ell : \underline{x} = (1,2,0) + s(1,-2,4)$.
- (7) ענו על הסעיפים הבאים:
 - א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(4,5,6)$. כתבו את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x, y ו- z .
 - ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות: $x = 1 + 2t, y = 10, z = 4 - t$. כתבו את ההצגה הפרמטרית שלו.
- (8) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.
- (9) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$ ומקביל לציר ה- z .
- (10) מצאו את נקודת החיתוך של הישר $\ell : \underline{x} = (1,-2,6) + t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

- 11) ישר עובר בנקודה $(1, -1, 4)$ וכיוונו $(4, 10, 2)$.
מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א. $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(4, 10, 2)$

ב. $\underline{x} = (3, 4, 5) + t(4, 10, 2)$

ג. $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 5, 1)$

ד. $\underline{x} = (5, 9, 6) + t(8, 20, 4)$

ה. כל התשובות נכונות.

- 12) ישר עובר דרך הנקודות $A(1, -1, 2)$ ו- $B(4, 0, 1)$.
תארו את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נק' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

- 13) הציגו כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

א. $\ell: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2t \\ z = 2 + 10t \end{cases}$

ב. $\ell: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 10t \end{cases}$

ג. $\ell: \frac{x-1}{2} = y+1 = z-4$

ד. $\ell: x-1 = y+10, z = 4$

ה. $\ell: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$

תשובות סופיות

(1) כן.

(2) לא.

(3) $\ell : \underline{x} = (-5, -2) + t(6, 8)$

(4) $\ell : \underline{x} = (4, 1, 1) + t(1, 1, 3)$

(5) $\ell : \underline{x} = (2, -7, 1) + s(-4, 2, 1)$

(6) $\ell : \underline{x} = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$

(7) א. $x = 1 + 4t, y = 2 + 5t, z = 3 + 6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1, 10, 4) + t(2, 0, -1)$

(8) $\ell : \underline{x} = t(0, 1, 0)$

(9) $\ell : \underline{x} = (3, -1, 4) + t(0, 0, 1)$

(10) $(7, -5, 0)$

(11) ה

(12) א. $\ell : \underline{x} = (1, -1, 2) + t \cdot (3, 1, -1)$ ב. $\ell : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$

ג. $\ell : \frac{x-1}{3} = y+1 = 2-z$ ד. $\ell : \begin{cases} x-3y=4 \\ y+z=1 \end{cases}$

(13) א. $\underline{x} = (1, 0, 2) + t(-4, 2, 10)$ ב. $\underline{x} = (1, 4, 0) + t(1, 0, 10)$ ג. $\underline{x} = (1, -1, 4) + t(2, 1, 1)$ ד. $(x, y, z) = (1, -10, 4) + t(1, 1, 0)$ ה. $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t(-2, -1, 1)$

מצב ההדדי בין ישרים

שאלות

- (1) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_1 : \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$
- (2) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_3 : \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1)$, $\ell_4 : \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$
- (3) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_5 : \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1)$, $\ell_6 : \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$
- (4) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_7 : \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5)$, $\ell_8 : \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$
- (5) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_9 : \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1)$, $\ell_{10} : \underline{x} = s(6, 0, -2)$
- (6) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
 $\ell_{11} : \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$, $\ell_{12} : \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$
- (7) מצאו את ערכו של הפרמטר k , שבעבורו הישרים :
 $\ell_1 : \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$
 א. מקבילים.
 ב. מתלכדים.
- (8) נתונות הנקודות $A(3, -1, 5)$, $B(k, -1, 3)$, $C(-6, 3, -1)$, $D(-2, 3, k)$
 הראו כי לכל ערך של k , הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

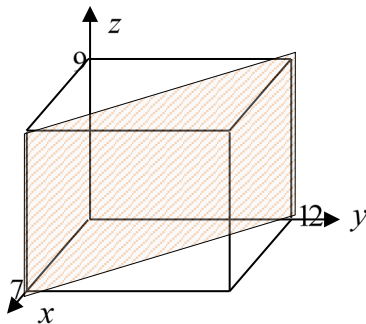
תשובות סופיות

- (1) מתלכדים.
- (2) מקבילים.
- (3) נחתכים, $(1, 5, 0)$.
- (4) מצטלבים.
- (5) מקבילים.
- (6) נחתכים, $(1, 8, -1)$.
- (7) א. $k = 2$ ב. $k = -2$.
- (8) שאלת הוכחה.

הצגה פרמטרית של מישור

שאלות

- (1) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבאות:
 $A(1, -4, 0)$, $B(3, 6, 2)$, $C(0, -3, 1)$.
- (2) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6, 7, -1)$,
 ומכיל את הישר $\ell : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$.
- (3) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$, $\ell_2 : \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$.
 הראו שהישרים נחתכים ומצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.
- (4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5, -2, -1)$
 ומכיל את ציר ה- x .
- (5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.
- (6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלהלן.
 מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.



תשובות סופיות

- (1) $\pi : \underline{x} = (1, -4, 0) + t(2, 10, 2) + s(-1, 1, 1)$
- (2) $\pi : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4) + s(8, 9, -6)$
- (3) $\pi : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3) + s(0, 1, -6)$
- (4) $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(5, -2, -1)$
- (5) $\pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1)$
- (6) $\pi : \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 9) + s(-7, 12, 0)$

משוואת מישור

שאלות

(1) קבעו האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi : 2x - y + 3z - 6 = 0$:

א. $D(5, 7, 1)$

ב. $E(2, -1, 1)$

(2) מצאו את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1, k, -1)$ נמצאת על

המישור $\pi : kx - 2y + (1+k)z + 7 = 0$.

(3) נתונה משוואת מישור $\pi : 3x + 2y - z - 9 = 0$.

מצאו את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

(4) נתונה משוואת מישור $\pi : 4x + y - 2z + 8 = 0$.

מצאו הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

תשובות סופיות

(1) א. על המישור. ב. לא על המישור.

(2) $k = 3$

(3) $(3, 0, 0)$, $\left(0, 4\frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, 0, -9)$

(4) $\ell : \underline{x} = (0, -8, 0) + t(0, 2, 1)$

מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור: $\pi : 2x + 3z - 12 = 0$. כתבו הצגה פרמטרית של המישור.
- (2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$. מצאו את משוואת המישור.
- (3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$. מצאו את משוואת המישור.
- (4) המישור π עובר בנקודות: $A(1, 0, -3)$, $B(2, 0, 0)$, $C(4, -1, 0)$. מצאו את משוואת המישור.
- (5) ענו על הסעיפים הבאים:
 - א. לפניך הנקודות הבאות: $(2, 0, 5)$, $(0, 1, -2)$, $(1, 1, 0)$.
 1. הראו ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד, ומצאו הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
 2. מצאו את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.
 - ב. מצאו שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.
 - ג. האם הנקודה $(4, 2, 1)$ נמצאת על המישור שנמצא בסעיף א'?

תשובות סופיות

- (1) $\pi : \underline{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, 0) + s(6, 0, -4)$
- (2) $\pi : -2x + 3y + z + 19 = 0$
- (3) $\pi : x - 3y + 8z = 0$
- (4) $\pi : 3x + 6y - z - 6 = 0$
- (5) א. 1. $\pi : \underline{x} = (1, 1, 0) + t(-1, 0, -2) + s(1, -1, 5)$ 2. $-2x + 3y + z - 1 = 0$
 ב. למשל: $(0, 0, 1)$, $(-0.5, 0, 0)$ ג. לא.

מישורים המקבילים לצירים

שאלות

(1) נתונה משוואת המישור $\pi : (k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$.
לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

(2) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$ ו- $x+3y+2z-6=0$.
מצאו את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות

(1) $k = 3$

(2) 6 יח"נ.

מצב החדדי בין ישר ומישור

- (1) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (5, 0, 1) + t(4, 1, -2)$, $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.
- (2) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (2, -1, 6) + t(-1, 1, 2)$, $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.
- (3) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (-6, 1, 0) + t(3, 0, -1)$, $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.
- (4) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (1, a, 3) + t(4, 1 - b, 0)$, $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$.
מצאו את ערכי a ו- b , עבורם הישר מוכל במישור.

תשובות סופיות

- (1) הישר חותך, $(1, -1, 3)$.
- (2) מקבילים.
- (3) הישר מוכל.
- (4) $a = 1$, $b = -7$

מצב החדדי בין מישורים

שאלות

(1) בכל סעיף נתונים שני מישורים. קבעו את המצב ההדדי ביניהם.

א. $\pi_1 : 2x - y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב. $\pi_3 : x + 3y - z + 1 = 0$, $\pi_4 : 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג. $\pi_5 : 5x - 2y - 2z + 3 = 0$, $\pi_6 : 2x + 3y + z - 5 = 0$

(2) נתונים שני מישורים

$$\pi_1 : 2x + (k^2 + k)y - 2z + 1 = 0 , \pi_2 : 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$$

מצאו את ערכי k עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

תשובות סופיות

(1) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

(2) א. $k \neq 2, -3$ ב. $k = -3$ ג. $k = 2$

ישר חיתוך בין מישורים

שאלות

(1) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x + y - 2z + 2 = 0$, $\pi_2 : 2x - y + z + 10 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(2) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x + 2y - 3z + 2 = 0$, $\pi_4 : 2x - 3y + z + 4 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(3) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x - 3y + z + 2 = 0$, $\pi_6 : 5x - 2z + 20 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(4) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x - 2y - z + 6 = 0$, $\pi_8 : z - 2 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

(5) מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x - 5y + z + 18 = 0$ עם המישור $[xz]$.

(6) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$. מצאו הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

תשובות סופיות

$$\ell : \underline{x} = (-2, 6, 0) + t(2, 16, 12) \quad (1)$$

$$\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(1, 2, 4) \quad (2)$$

$$\ell : \underline{x} = (0, 4, 10) + t\left(4, 7\frac{1}{3}, 10\right) \quad (3)$$

$$\ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(4, 2, 0) \quad (4)$$

$$\ell : \underline{x} = (-3, 0, 0) + t(3, 0, -18) \quad (5)$$

$$\ell : \underline{x} = t(1, 9, 13) \quad (6)$$

זווית בין שני ישרים

שאלות

- (1) מצאו את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:
- א. $\ell_1 : \underline{x} = (4, 0, 0) + t(6, 8, 1)$, $\ell_2 : \underline{x} = s(-4, 2, -4)$
- ב. $\ell_1 : \underline{x} = (10, 17, -18) + t(3, 0, -6)$, $\ell_2 : \underline{x} = (6, 5, 4) + s(0, 4, 0)$
- (2) מצאו את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $A(3, 4, 6)$, $B(6, 0, -2)$ וישר העובר דרך הנקודות $C(6, 5, 1)$, $D(-1, 4, 2)$ וקבעו מה המצב ההדדי ביניהם.
- (3) נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$.
- א. מצאו הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:
1. A ו-B.
2. B ו-C.
3. A ו-C.
- ב. מי מבין הנקודות $D(4, 2, -1)$ ו- $E(7, 7, -3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?
- ג. חשבו את הזווית שבין הישר AB והישר BC.
- (4) נתון מישור שמשוואתו: $3x - 4y + 6 = 0$. הנקודות $A(x, 6, 1)$, $B(-2, y, -1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$. מצאו את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

תשובות סופיות

- (1) א. 78.521° ב. 90°
- (2) 63.37° . הישרים מצטלבים.
- (3) א. 1. $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(3, 5, -1)$ א. 2. $\ell : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(-1, -3, 3)$
- א. 3. $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(2, 2, 2)$ ב. הנקודה D. ג. 35.477°
- (4) C(0, 2, 11) או C(0, 28.45, 11)

זווית בין ישר ומישור

שאלות

- (1) מצאו את הזווית שבין הישר והמישור הבאים :
 $\ell : \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2)$, $\pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$
- (2) נתונות הנקודות $A(1, -1, 2)$, $B(0, 2, -1)$, $C(1, 2, 5)$, $D(-7, 3, -1)$
 מצאו את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.
- (3) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה $2x + y - 2z - 6 = 0$,
 וקדקוד הפירמידה הוא $S(3, 1, -2)$.
 מצאו את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
 אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים $x_B = z_B = -1$.

תשובות סופיות

- (1) 18.87°
- (2) 44.83°
- (3) 14.9°

זווית בין שני מישורים

שאלות

- (1) מצאו את הזווית שבין המישורים הבאים : $\pi_1 : 4x + 3y + z - 12 = 0$ ו- $\pi_2 : 4x - 7y + 5z + 3 = 0$.

- (2) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקדקודיה הם : $A(0, 2, -5)$, $B(3, -1, 1)$, $C(7, -1, -5)$, $D(3, 2, 0)$. מצאו את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

- (3) מצאו את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x + 5y - z + 4 = 0$ למישור $[xz]$.

תשובות סופיות

- (1) 90°
 (2) 87.539°
 (3) 32.312°

מרחק בין שתי נקודות במרחב

שאלה

- (1) נתונות הנקודות $A(2, 4, -5)$, $B(0, -2, 6)$ ו- $C(k, -1, 13-k)$. מצאו ערכי k עבורם המשולש ABC יהיה שווה שוקיים, כך ש- $AB = AC$.

תשובה

- (1) $k = 8$ או $k = 12$.

מרחק בין נקודה לישר

שאלות

- (1) מצאו את המרחק שבין הנקודה $A(13, -1, -19)$ לישר $\ell : \underline{x} = t(2, 0, -7)$.
- (2) נתונות הנקודות $A(1, 6, -1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(6, -4, 0)$.
חשבו את שטח המשולש ABC .
- (3) על הישר $\ell : \underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע $ABCD$.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5, 4, 2)$.
מצאו את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות

- (1) $\sqrt{54}$
- (2) 12.75 יח"ש.
- (3) $B(5, 4, -6)$ או $B(5, -4, 2)$.

מרחק בין נקודה למישור

שאלות

- (1) מצאו את מרחקו של המישור $4x - 2y - 4z + 15 = 0$ מראשית הצירים.
- (2) מצאו משוואת מישור המאונך לישר $\ell : \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$ ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4, 5, -9)$.
- (3) נתונים ישר ומישור $\ell : \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$, $\pi : 2x + 4y - 4z + 15 = 0$ מצאו את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

תשובות סופיות

- (1) $2\frac{1}{2}$
- (2) $\pi : 3x - 2y + z - 7 = 0$ או $\pi : 3x - 2y + z + 21 = 0$
- (3) $(4, 5, 1)$ או $(1, -9, 5)$

מרחק בין ישרים מקבילים

שאלות

(1) נתונות הנקודות $A(15, 0, -4)$, $B(12, -5, 2)$, $C(6, 1, 4)$, $D(12, 11, -8)$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B

ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצאו את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

(2) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x} = (2, 0, -1) + t(1, -2, 1) \quad , \quad l_2: \underline{x} = (-8, -1, 19) + s(-4, 1, 6)$$

$$l_3: \underline{x} = (-2, 7, -11) + r(-2, 4, -2) \quad , \quad l_4: \underline{x} = (-2, 1, 5) + q(4, -1, -6)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצאו את שטח המלבן.

תשובות סופיות

(1) א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

(2) א. שאלת הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

מרחק בין ישר למישור

שאלות

- (1) נתונה משוואת המישור $4x - z + 6 = 0$.
- א. מצאו את המצב ההדדי בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.
- ב. מצאו את המרחק בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.
- (2) נתונים ישר ומישור $\pi: 3x + 12y - 4z + k - 10 = 0$, $l: \underline{x} = (1, k-1, 5) + t(4, -2, -3)$.
- א. הוכיחו שהישר מקביל למישור או מוכל בו.
- ב. מצאו את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

תשובות סופיות

- (1) א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$.
- (2) א. שאלת הוכחה. ב. $k = 2, 4$.

מרחק בין מישורים מקבילים

שאלות

- (1) נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x - 4y + 5z - 10 = 0$. מצאו משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.
- (2) נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1: x - 2y - 2z + 6 = 0$, $\pi_2: x - 2y - 2z - 12 = 0$. מצאו את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.
- (3) נתונים שישה מישורים:
 $\pi_1: 2x + y - 2z - 11 = 0$, $\pi_2: x + 2y + 2z + 5 = 0$, $\pi_3: 2x - 2y + z + 3 = 0$
 $\pi_4: 2x + y - 2z + 7 = 0$, $\pi_5: x + 2y + 2z - 1 = 0$, $\pi_6: kx + qy + z + p = 0$
 מצאו את ערכי הפרמטרים k, q ו- p , שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.
- (4) כדור שמרכזו בנקודה $O(3, 8, -1)$ חסום בקובייה שבבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x + 4y - 3z - 6 = 0$. מצאו את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

תשובות סופיות

- (1) $\pi_1: 3x - 4y + 5z + 10 = 0$, $\pi_2: 3x - 4y + 5z - 30 = 0$
- (2) $\pi_3: x - 2y - 2z - 3 = 0$
- (3) $k = 2$, $q = -2$, $p = 18, -12$
- (4) $12x + 4y - 3z - 136 = 0$

מרחק בין ישרים מצטלבים

שאלות

- (1) נתונים שני ישרים, $\ell_1 : \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$ ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$.
הראו שהישרים מצטלבים ומצאו את המרחק שביניהם.
- (2) נתונים שני ישרים מצטלבים, $\ell_1 : \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$ ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$.
מצאו את המרחק שביניהם.
- (3) מצאו את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$ מציר ה- z .

תשובות סופיות

- (1) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.
- (2) 1.567 יח"א.
- (3) $\sqrt{2}$ יח"א.

היטלים ונקודות סימטריה

שאלות

- (1) נתונה נקודה $A(1, -1, 3)$ ונתון הישר $\ell: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-1}$.
 א. מצאו את היטל הנקודה A על הישר.
 ב. מצאו את הנקודה הסימטרית ל- A ביחס לישר.
- (2) נתונה נקודה $A(0, 0, 1)$ ונתון מישור $7x + 7y - z = 8$.
 א. מצאו את היטל הנקודה A על המישור.
 ב. מצאו את הנקודה C , הסימטרית ל- A , ביחס למישור.
- (3) ענו על הסעיפים הבאים:
 א. מצאו את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(1, 3, 2)$ ביחס למישורי הצירים.
 ב. מצאו את הנקודות הסימטריות לנקודה $A(x, y, z)$ ביחס למישורי הצירים.
- (4) נתונות 4 נקודות במרחב: $A(0, 2, 4)$, $B(-2, 6, -2)$, $C(2, -4, 8)$, $D(10, 2, 0)$.
 מצאו את היטל הישר AD על המישור ABC .

תשובות סופיות

- (1) א. $B(0, 1.5, -1.5)$ ב. $C(-1, 4, -6)$
- (2) א. $B\left(\frac{7}{11}, \frac{7}{11}, \frac{10}{11}\right)$ ב. $C\left(\frac{14}{11}, \frac{14}{11}, \frac{9}{11}\right)$
- (3) א. $B_{xy}(1, 3, -2)$, $C_{xz}(1, -3, 2)$, $D_{yz}(-1, 3, 2)$
 ב. $B_{xy}(x, y, -z)$, $C_{xz}(x, -y, z)$, $D_{yz}(-x, y, z)$
- (4) $\underline{x} = (0, 2, 4) + t(0, 1, 1)$

שאלות מסכמות

- (1) נתונות הנקודות $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.
- מצאו הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C .
הראו כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.
 - חשבו את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C .
 - מצאו את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C .
- (2) מצאו את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבעו אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
- במקרה בו הישרים נחתכים, מצאו גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
- במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצאו גם את המרחק ביניהם.
- $\underline{x} = (1,0,1) + t(1,2,0)$, $\underline{x} = (1,1,0) + s(2,4,0)$
 - $\underline{x} = (-2,2,4) + u(6,6,1)$, $\underline{x} = (1,-1,0) + s(12,-3,1)$
 - $\underline{x} = (1,1,2) + t(1,2,-1)$, $\underline{x} = (2,3,1) + s(2,4,-2)$
 - $\underline{x} = (1,-1,0) + t(0,2,-4)$, $\underline{x} = (2,0,3) + s(-1,-3,1)$
- (3) מצאו את המצב ההדדי של המישור והישר וקבעו אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
- במקרה שהישר חותך את המישור, מצאו גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
- במקרה בו הישר מקביל למישור מצאו את מרחק הישר מהמישור.
- $2x - 3y + 4z - 5 = 0$, $\underline{x} = (1,0,2) + t(-1,2,2)$
 - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $\underline{x} = (-3,0,4) + t(4,-2,-6)$
 - $2x - 14y + 10z = -6$, $\underline{x} = (2,1,-2) + t(-2,2,0)$
- (4) מצאו את המצב ההדדי של המישורים וקבעו אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים.
- במקרה בו המישורים מקבילים מצאו את המרחק ביניהם.
- במקרה בו הם נחתכים מצאו את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.
- $x - 2y + 2z - 10 = 0$, $2x + y + 2z - 4 = 0$
 - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $4x - 10y + 6z - 8 = 0$
 - $2x - 14y + 10z = -6$, $x - 7y + 5z = -3$

- (5) נתונה קובייה $ABCD A'B'C'D'$, שנפחה הוא 8.
 משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא $\pi_1 : 4x + y + 3z - 28 = 0$.
 משוואת המישור שעליו מונחת הפאה $ABB'A'$ היא $\pi_2 : x + 2y - 2z + 6 = 0$.
 מצאו הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).
- (6) הנקודה $A(4, 0, -1)$ נמצאת על כדור, שמרכזו $O(1, 1, 2)$.
 מצאו את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.
- (7) נתונים מישור וישר $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$, $\ell : \underline{x} = (1, 5, 5) + t(1, 1, 0)$.
 מצאו נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z , הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.
- (8) נתונים שני מישורים $\pi_1 : 2x - 4y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 1 = 0$.
 מצאו הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצאו הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).
- (9) נתונים ישר ומישור $\pi : 6x + 2y - z + 5 = 0$, $\ell_1 : \underline{x} = (0, -3, 0) + t(1, 1, -8)$.
 ישר נוסף, ℓ_2 , המקביל למישור π , עובר בנקודה $P(1, 0, -4)$ וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.
 מצאו את שטח המלבן PQQ'P'.
 (הדרכה: הביעו באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2)
- (10) נתונים שני מישורים $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2 : 3x + y + 2z + 11 = 0$.
 ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
 המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של 60° עם הישר $\ell_2 : \underline{x} = (1, 3, -4) + t(1, 1, 0)$.
 מצאו את משוואת המישור π_3 .

תשובות סופיות

(1) א. $\underline{x} = (1, 2, 0) + t(0, -1, 1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y - z + 2 = 0$

(2) א. מקבילים, 1.095 ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1, -3, 4)$. הזווית היא: 47.6° .

(3) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל.
ג. חותך בנקודה $(3.5, -0.5, -2)$, הזווית היא: 40.78° .

(4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x} = (0, -2, 3) + t(3, -1, -2.5)$, זווית: 63.6° .
ב. מקבילים. המרחק: 0.324 ג. מתלכדים.

(5) $\ell: \underline{x} = (0, 2.5, 8.5) + t(2, -2.75, -1.75)$, $\ell: \underline{x} = (0, 7, 7) + t(8, -11, -7)$

(6) $\pi: -3x + y + 3z + 15 = 0$

(7) $(0, 0, 4)$ או $\left(0, 0, 14\frac{4}{5}\right)$

(8) $\ell: \underline{x} = \left(0, -14, -15\frac{3}{4}\right) + t(-14, 14, 21)$

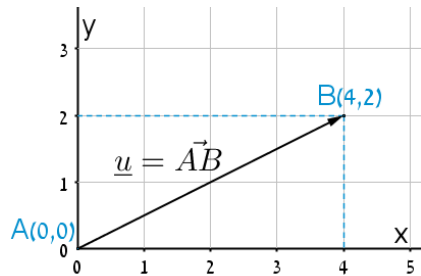
(9) 10.467 יח"ש.

(10) $\pi_3: x + 2y - z - 58 = 0$ או $\pi_3: 2x + y + z - 5 = 0$

סיכום כללי

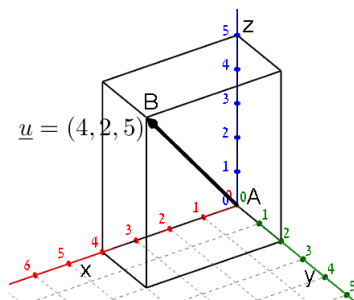
הגדרה כללית

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u} = (x,y)$.



דוגמאות:

- הווקטור $\underline{u} = (4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הווקטור $\underline{u} = (4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2,5)$.

ווקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

ווקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ וסופו בנקודה $B(x_2, y_2, z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ הוא: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}; y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}; z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k+l}$.

מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של ווקטורים: $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

גודלו של וקטור $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}| = \sqrt{u^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

הצגה פרמטרית של ישר

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני ווקטורים.

הווקטור $\underline{a}$ נקרא ווקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.

הווקטור $\underline{u}$ נקרא ווקטור הכיוון של הישר.

זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.

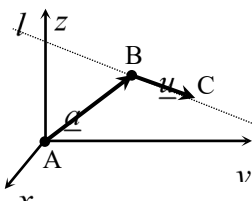
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$.

כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר ℓ .

דוגמא: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים

הבאים: $\underline{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,3,1)$; $\underline{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$.

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $\ell: \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$.



***הערות:**

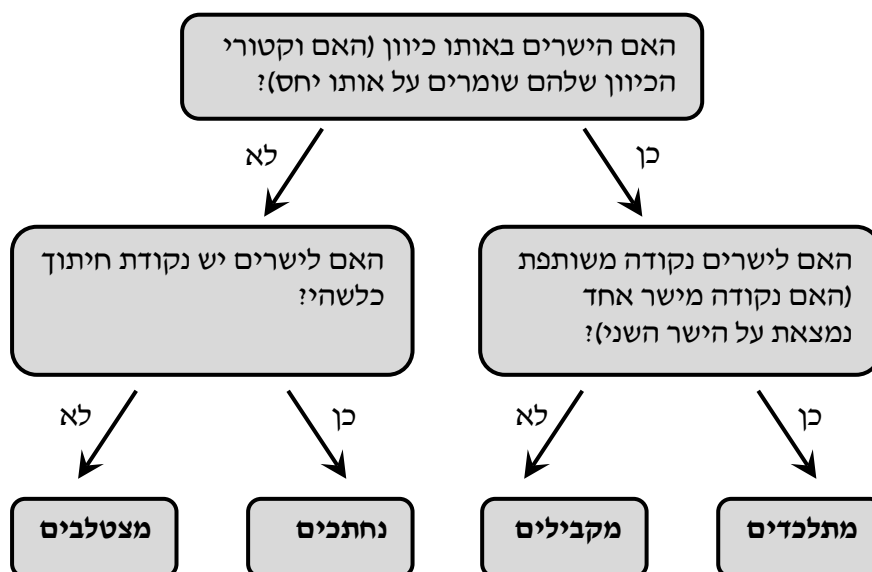
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
- ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l: \underline{x} = (7, 0, 10) + t(-6, 9, -27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

מצב הדדי בין ישרים

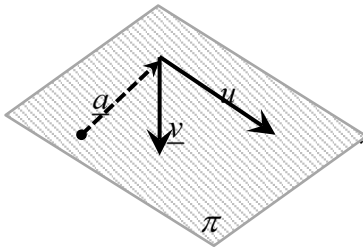
ישנם 4 מצבים הדדיים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



הצגה פרמטרית של מישור



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.

הווקטור $\underline{a}$ הוא ווקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם ווקטורי הכיוון של המישור.

אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר t, s הם מספרים ממשיים כלשהם ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר

מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π .

משוואת מישור

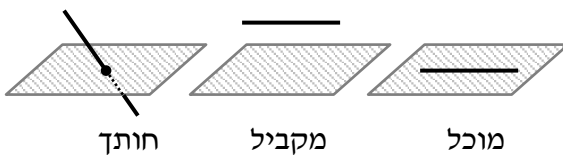
ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi : ax + by + cz + d = 0$,

כאשר: (x, y, z) היא נקודה על המישור והמקדמים a, b, c הם שיעורי ווקטור הנורמל

של המישור המסומן: $\underline{h} = (a, b, c)$.

מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:



• הישר חותך את המישור.

• הישר מקביל למישור.

• הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

• אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.

• אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.

• אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך וקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ו- $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

נקבעו את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

נחתכים	מקבילים	מתלכדים
כל מצב אחר	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ תחושב ע"י: $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$.
- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$ ו- $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos \alpha = \left| \frac{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|} \right|$.
- זווית חדה α בין ישר $l = \underline{a} + t\underline{u}$ ומישור $\pi: ax + by + cz + d = 0$ תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin \alpha = \left| \frac{\underline{u} \cdot \underline{h}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|} \right|$.
- זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ו- $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ תחושב ע"י: $\cos \alpha = \left| \frac{\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2}{|\underline{h}_1| \cdot |\underline{h}_2|} \right|$.

חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
2. מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית $l: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.
3. מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ למישור $\pi: ax + by + cz + d = 0$ יחושב ע"י: $d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$.
4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.
5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאת מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.
6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
 - א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.
 - ב. שימוש בנוסחה: $d = \left| \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$.
7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

חדוא 2

פרק 4 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

57	1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים
60	2. מבחן ההתבדרות של טורים
61	3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים
63	4. מבחני התכנסות לטורים כלליים
65	5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי
66	6. תרגילי תיאוריה

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-6. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} & (3) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n & (1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} & (6) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} & (5) & \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} & (4) \end{array}$$

טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-11. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} & (8) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} & (7) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} & (10) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) & (9) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} & (11) \end{array}$$

טור הרמוני מוכלל

12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} & \text{ג.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{ב.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} & \text{א.} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} & \text{ו.} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} & \text{ה.} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} & \text{ד.} \end{array}$$

תכונות אלגבריות של טורים

(13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

(14) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.123123123... + 0.141414...$.

תשובות סופיות

- (1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$.
 (2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$.
 (3) מתבדר.
 (4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$.
 (5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$.
 (6) מתכנס ל- 8.
 (7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$.
 (8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$.
 (9) מתבדר.
 (10) $S = \frac{1}{\ln 2}$
 (11) $\frac{1}{12}$
 (12) א. מתכנס.
 ב. מתבדר.
 ג. מתבדר.
 ד. מתבדר.
 ה. מתכנס.
 ו. מתכנס.
 (13) א. מתכנס.
 ב. מתבדר.
 ג. מתבדר.
 (14) $\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$
 (15) $\frac{323}{1221}$

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$	ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$	ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$
ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2}$	ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$	ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n} \right)^n$

תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p \leq 1) \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p > 1) \quad (4)$$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$.

מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\sin^2 n}{n!} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{3^n+2n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (14) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \quad (13)$$

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן ראפה

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad (26) \quad \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad (25)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|---------------|-------------|-------------|
| (1) מתבדר. | (2) מתבדר. | (3) מתכנס. |
| (4) מתכנס. | (5) מתבדר. | |
| (6) א. מתכנס. | ב. 0 | |
| (7) מתכנס. | (8) מתבדר. | (9) מתכנס. |
| (10) מתבדר. | (11) מתכנס. | (12) מתכנס. |
| (13) מתבדר. | (14) מתכנס. | (15) מתכנס. |
| (16) מתבדר. | (17) מתכנס. | (18) מתכנס. |
| (19) מתכנס. | (20) מתכנס. | (21) מתכנס. |
| (22) מתכנס. | (23) מתכנס. | (24) מתכנס. |
| (25) מתבדר. | (26) מתבדר. | |

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-3 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

מבחן דיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו שהטורים } \sum \sin n\theta, \sum \cos n\theta, \text{ כאשר } \theta \neq 2\pi k, \text{ חסומים.}$$

$$(7) \quad \text{הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים :}$$

$$\sum \frac{\sin n\theta}{n}, \quad \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \quad \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}} \quad (\theta \neq 2\pi k).$$

$$(8) \quad \text{בדקו התכנסות הטור } \sum \frac{\sin^2 n}{n}.$$

$$(9) \quad \text{הוכיחו שאם הסדרה } b_n \text{ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור } \sum b_n \sin n \text{ מתכנס.}$$

$$(10) \quad \text{ענו על שני הסעיפים הבאים :}$$

$$א. \text{ הוכיחו שהטור } \sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\bmod 7) \text{ הוא טור חסום.}$$

$$ב. \text{ בדקו את התכנסות הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\bmod 7)}{\sqrt{n+1}}.$$

מבחן אבל

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר :

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|----------------|-------------|-------------|
| (1) מתכנס. | (2) מתכנס. | (3) מתכנס. |
| (4) מתכנס. | (5) מתכנס. | (6) הוכחה. |
| (7) הוכחה. | (8) מתבדר. | (9) הוכחה. |
| (10) א. הוכחה. | ב. מתכנס. | (11) מתכנס. |
| (12) מתכנס. | (13) מתכנס. | (14) מתכנס. |

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| (1) מתבדר. | (2) מתכנס בהחלט. | (3) מתכנס בתנאי. |
| (4) מתכנס בתנאי. | (5) מתכנס בהחלט. | (6) מתכנס בהחלט. |
| (7) מתכנס בתנאי. | (8) מתכנס בתנאי. | (9) מתכנס בתנאי. |

תרגילי תיאוריה

(1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

(2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

(3) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1)^n)$ מתבדר.

(4) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

(5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

(6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

(7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

(8) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

(9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n \geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ לכל n , אז $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

(10) נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

(11) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

(12) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

(13) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי.

(14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל n , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל n , אז הטור מתבדר.

(15) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

16 נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

17 הוכיחו :

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

18 הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

19 נתון $a_n \geq 0$ לכל n .

א. נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

20 הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

$$(21) \text{ הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכיחו כי הטור מתכנס.

$$(22) \text{ נתון טור חיובי ומתכנס } \sum a_n, \text{ ונתון כי לכל } n \text{ מתקיים } a_{n+1} \leq a_n.$$

הוכיחו כי $\sum n(a_n - a_{n+1})$ מתכנס.

$$(23) \text{ נתון } \forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1 - a_{n+1}) > 1.$$

$$\text{האם } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1) \text{ מתכנס?}$$

$$(24) \text{ נניח כי } (a_n) \text{ סדרה המקיימת } a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}, a_n > 0, \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

הוכיחו כי $\sum a_n$ מתבדר.

$$(25) (a_n) \text{ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.}$$

$$\text{הוכיחו כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ מתבדר.}$$

$$(26) \text{ נתון טור חיובי } \sum a_n.$$

הוכיחו או הפריכו:

- א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.
 ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

$$(27) \text{ ענו על הסעיפים הבאים:}$$

$$\text{א. הוכיחו כי הסדרה } a_n \text{ מתכנסת אם ורק אם } \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) \text{ מתכנס.}$$

$$\text{ב. בדקו האם הסדרה } a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \text{ מתכנסת.}$$

$$\text{ג. בדקו האם הסדרה } a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \text{ מתכנסת.}$$

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא טורי מקלורן עם שארית לגראנז'.

(28) פונקציה f מוגדרת לכל x , גזירה ב-0 ומקיימת $f(0) = 0$. הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

(29) נתון $p(x)$ פולינום.

$\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

הוכיחו כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow p(0) = 0$.

(30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים.

נתון כי:

(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. (2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il

חדוא 2

פרק 5 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

71	1. סדרות פונקציות
74	2. טורי פונקציות
76	3. טורי חזקות
78	4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות 1-11 :

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

$$(1) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} [0, 0.5] \quad (2) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{ב-} (0, 1)$$

$$(3) \quad f_n(x) = \arctan(nx) \quad \text{ב-} (0, \infty) \quad (4) \quad f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(5) \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{ב-} [0, 1] \quad (6) \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad \text{ב-} [0.5, 4]$$

$$(7) \quad f_n(x) = \frac{1}{x^2+n} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (8) \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad \text{ב-} \mathbb{R}$$

$$(9) \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+x^2+n^2} \quad \text{ב-} \mathbb{R} \quad (10) \quad f_n(x) = n(1-x)x^n \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(11) \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1) + 1 & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ב-} [0, 1]$$

$$(12) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0, 4]$?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0, 4]$?
 ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?
 ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(13) \text{ נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}$$

- א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0, \infty)$?
 ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[0, \infty)$?
 ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[1, \infty)$?

$$(14) \text{ נתונה } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

$$(15) \text{ נגדיר את סדרת הפונקציות } f_n(x) = \left[1 - \chi_n(x) \right] \left(x + \frac{1}{n} \right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x)$$

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left(n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2} \right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ כאשר}$$

- א. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1, \infty)$?
 אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?
 ב. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1, \infty)$?

תשובות סופיות

- (1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \frac{\pi}{2}$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0.5 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ 1 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2}$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- (10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$. ב. לא במידה שווה.
- (12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
- ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ד. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. לא במידה שווה. ג. כן.
- (14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- (15) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1, \infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.
ב. רק אם $\alpha < 0$.

טורי פונקציות

שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-6 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\ln(nx)]^4} \quad (4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5)$$

בדקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם :

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (7)$$

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{3}}}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 4 \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (10)$$

$$(-a \leq x \leq a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (11)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (12)$$

תשובות סופיות

(1) $x > 0$

(2) $x \neq 5$

(3) $x < 3\frac{9}{10} \text{ or } 4\frac{1}{10}$

(4) $0 < x \neq \frac{1}{n}$

(5) $x > 0$

(6) $x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$

(7) מתכנס במידה שווה.

(8) מתכנס במידה שווה.

(9) מתכנס במידה שווה.

(10) מתכנס במידה שווה.

(11) מתכנס במידה שווה.

(12) מתכנס במידה שווה.

טורי חזקות

שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-12 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות :

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (20) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (19)$$

הערות חשובות

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

תשובות סופיות

- $$\begin{aligned} (1) \quad & -1 \leq x < 1, R = 1 \\ (2) \quad & -\infty < x < \infty, R = \infty \\ (3) \quad & -0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2 \\ (4) \quad & -1 \leq x \leq 1, R = 1 \\ (5) \quad & -3 < x \leq -1, R = 1 \\ (6) \quad & -1 < x < 1, R = 1 \\ (7) \quad & x = 1, R = 0 \\ (8) \quad & -\infty < x < \infty, R = \infty \\ (9) \quad & -5 < x \leq 3, R = 4 \\ (10) \quad & -\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3 \\ (11) \quad & -9 \leq x \leq 11, R = 10 \\ (12) \quad & -7 < x < -3, R = 2 \\ (13) \quad & (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \\ (14) \quad & (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\ (15) \quad & (|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \\ (16) \quad & (|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \\ (17) \quad & (|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \\ (18) \quad & (|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \\ (19) \quad & (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \\ (20) \quad & (|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \end{aligned}$$

גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות 1-7 :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (2)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (3)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (4)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (7)$$

$$(8) \quad \text{חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$$

$$(9) \quad \text{חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n) x^{n-1}$$

(10) ענו על הסעיפים הבאים :

$$א. \text{ חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$ב. \text{ מהו סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n-1)} ?$$

(11) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$

(12) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$

(13) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

תשובות סופיות

$$(1) \quad (|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (2) \quad (-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$(3) \quad (-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (4) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(5) \quad (-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (6) \quad (|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2}$$

$$(7) \quad (|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (8) \quad \frac{20}{27}$$

$$(9) \quad \frac{2}{(1-x)^3} \quad |x| < 1 \quad (10) \quad \text{א. } \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad |x| < 1 \quad \text{ב. } \frac{1}{4} \ln 3$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \arctan x \quad |x| < 1 \quad \text{ב. } \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} \right)$$

$$(12) \quad \frac{1}{10} \left(\frac{1}{4} \ln \frac{11}{9} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{10} \right) \quad (13) \quad \arctan x \quad |x| \leq 1$$

חדוא 2

פרק 6 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

80	1. טור טיילור וטור מקלורן
82	2. טור טיילור סביב $X=X_0$
83	3. חישוב סכום של טור
84	4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן
85	5. חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ
87	6. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים
88	7. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'
94	8. נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

בשאלות 1-24 מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) :

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (20) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (24) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24 יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות 25-27 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27) \quad f(x) = \tan x \quad (26) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(-1 \leq x < 1) \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10) \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9)$$

$$(-1 < x < 1)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14) \quad (|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (16) \quad (|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18) \quad (|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20) \quad (-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24) \quad (|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26) \quad 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (27)$$

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

$$(x_0 = 1) \quad f(x) = \ln x \quad (1)$$

$$(x_0 = 2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) \quad f(x) = \sin x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1)$$

$$(0 < x \leq 2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2)$$

$$(0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

חישוב סכום של טור

שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!}$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

(6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

(7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

(8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

(9) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

תשובות סופיות

(1) e

(2) e^{-2}

(3) $\sqrt{e}$

(4) $2e$

(5) $\pi/4$

(6) $\sin 1$

(7) $\cos 1$

(8) $\ln 2$

(9) $\ln \frac{3}{2}$

חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את ערך הגבול:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

(4) נתון כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{x^2} - 1}{x^n} = k$ כאשר k קבוע שונה מאפס. מצאו את n ואת k .

(5) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}$.

תשובות סופיות

(1) $\frac{1}{120}$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) $\frac{1}{3}$

(4) $k=1, n=3$

(5) 1

חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001:

$$\frac{1}{e} \quad (1) \quad \sin 3^\circ \quad (2) \quad \arctan 0.25 \quad (3)$$

בשאלות 4-6 חשבו בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4) \quad \cos 4^\circ \quad (5) \quad \ln 1.5 \quad (6) \quad (n=3) \quad (n=1) \quad (n=4)$$

$$(7) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ עבור } |x| \leq \frac{\pi}{6} ?$$

$$(8) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \ln(1+x) \cong x \text{ עבור } |x| < 0.01 ?$$

$$(9) \quad \text{מהי השגיאה המקסימלית בקירוב } \cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \text{ עבור } |x| \leq 0.2 ?$$

$$(10) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.001?}$$

$$(11) \quad \text{עבור אילו ערכי } x, \arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \text{ בשגיאה הקטנה מ-0.01?}$$

תשובות סופיות

(1) $\frac{53}{144}$

(2) $\frac{\pi}{60}$

(3) $\frac{47}{192}$

(4) $\frac{5}{8}, \text{ בשגיאה הקטנה מ- } \frac{1}{48}$

(5) $1, \text{ בשגיאה הקטנה מ- } \frac{\pi \cdot \pi}{4050}$

(6) $\frac{77}{192}, \text{ בשגיאה הקטנה מ- } \frac{1}{160}$

(7) $\frac{(\pi/6)^5}{5!}$

(8) $\frac{(0.01)^2}{2}$

(9) $\frac{(0.2)^6}{6!}$

(10) $|x| < \sqrt[5]{3/25}$

(11) $|x| < \sqrt[3]{9/100}$

חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε :

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\frac{449}{2250} \quad (1)$$

$$\frac{39}{400} \quad (2)$$

$$\frac{143}{576} \quad (3)$$

חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

(1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt{x+4}$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים:

$$2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 < \sqrt{x+4} < 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4} \approx 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2$, עבור $|x| < 0.1$?

(2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים:

$$4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 < \sqrt[3]{64+x} < 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{5308416}x^3$$

(3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x) = \tan x$ סביב $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $0 < x < 1$ מתקיים:

$$x < \tan x < x + 4\sqrt{3}x^2$$

(4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x}$ סביב $x_0 = 16$, כולל שארית לגראנז'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

(5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3} .

(6) חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:

א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = 0$.

ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = \frac{\pi}{4}$.

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$? נמקו.

(7) נתונה $f(x) = \sqrt{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $0 \leq x \leq 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x \geq 0$ מתקיים $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$.

(8) נתונה $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3, עבור $0.1 \leq x \leq 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$\frac{1}{1+x} \cong 1 - x + x^2 - x^3, \text{ עבור } 0.1 \leq x \leq 0.9.$$

ג. הוכיחו כי עבור $-1 < x$ מתקיים $\frac{1}{1+x} \geq 1 - x + x^2 - x^3$.

(9) נתונה $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x| \leq 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cong 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2, \text{ עבור } |x| \leq 0.5.$$

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} < 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$, עבור $-1 < x$.

(10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x) = e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\sqrt{e}$ ברמת דיוק של 10^{-4} .

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$$e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \text{ עבור } 0 \leq x \leq 1.$$

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1, 1)$, שעבורו $|e^x - p(x)| < 10^{-5}$.

11) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x) = \ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.
- ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4} .
- ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת :
- $$\ln(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{עבור } 0 \leq x \leq 1.$$
- ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $|\ln(1+x) - p(x)| < 10^{-2}$.
- ה. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים אי השוויון $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

12) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,

ונניח ש- $f(0) = f(1) = 0$ ו- $|f''(x)| \leq M$ לכל $0 < x < 1$.

הוכיחו כי $|f'(x)| \leq \frac{M}{2}$ לכל $0 \leq x \leq 1$.

13) תהי $f : [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1) = f(1) = 0$.

כמו כן, נתון כי קיים M , כך ש- $|f''(x)| \leq M$ בקטע.

הוכיחו שלכל $-1 \leq x \leq 1$ מתקיים $|f(x)| \leq \frac{M}{2}$.

14) תהי f פונקציה גזירה ב- $(0, \infty)$, ונניח כי $|f'(x)| \leq M$ לכל $0 < x$.

הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

15) תהי $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x) \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$,

ונניח כי $x_0 \in [a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y - \cos x \geq (x - y) \sin x$ לכל $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

16) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים :

$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$, $M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$

הוכיחו כי $(M_1)^2 \leq 2M_0M_2$.

(17) נניח ש- f גזירה פעמיים ב- $(0, \infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0, \infty)$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

הוכח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. נוסחה: } \sqrt[3]{64+x} = 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{81 \cdot \sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt[3]{66} = 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2304} = \frac{9311}{2304} \cdot \frac{5}{663552}$$

$$\text{ב. שאלת הוכחה. ג. } \frac{1}{480000}$$

$$(2) \text{ א. נוסחה: } \tan x = x + \frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2, \text{ חישוב: } \tan 0.1 = \frac{1}{10}, \text{ שגיאה בקירוב: } \frac{1}{970}$$

ב. שאלת הוכחה.

$$(3) \text{ א. נוסחה: } \sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{16 \cdot \sqrt{(c+4)^8}}x^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64} \cdot \frac{1}{512}$$

ב. שאלת הוכחה.

$$(4) \text{ נוסחה: } \sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{128 \cdot \sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$$

$$\text{חישוב: } \sqrt[4]{15} = 2 - \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} = \frac{8061}{4096} \cdot \frac{1}{3130}$$

$$(5) \quad \sqrt[3]{29} = 3 \frac{158}{2187}$$

$$(6) \text{ א. } \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} \quad \text{ב. } \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4} \right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4} \right)^3$$

$$(7) \text{ א. ב. } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{בשגיאה הקטנה מ-} 0.25$$

$$(8) \text{ א. } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \quad \text{בשגיאה הקטנה מ-} \frac{6561}{10000}$$

$$\text{ב. שגיאה הקטנה מ-} \frac{6561}{10000} \quad \text{ג. שאלת הוכחה.}$$

$$(9) \text{ א. } \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 \quad \text{בשגיאה הקטנה מ-} \frac{7}{27}$$

$$\text{ב. השגיאה המקסימלית היא } \frac{7}{27} \quad \text{ג. ראו בסרטון.}$$

$$(10) \text{ א. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^n \quad \text{ב. } \sqrt{e} = 1.6487$$

$$\text{ג. } \frac{3}{(n+1)!} \quad \text{ד. } p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}$$

$$(11) \text{ א. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1}$$

$$\text{ב. } \ln(1.5) = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \frac{0.5^5}{5} - \frac{0.5^6}{6} + \frac{0.5^7}{7} - \frac{0.5^8}{8} + \frac{0.5^9}{9}$$

$$\text{ג. } \frac{1}{n+1} \text{ ד. } p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102} \text{ ה. שאלת הוכחה.}$$

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

(17) שאלת הוכחה.

הערה לגבי קירובים

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא מדויק ל- n ספרות אחרי הנקודה,

אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} .

למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,

שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.0005 = 0.5 \times 10^{-3}$.

בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 \leq x \leq 1 \ (m > 0)$ $-1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0)$ $-1 < x < 1 \ (m \leq -1)$ $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

חדוא 2

פרק 7 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

95	1. קווים ותחומים במישור
99	2. קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית
105	3. קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)
110	4. משטחים במרחב
(ללא ספר)	5. משטחים במרחב בהצגה פרמטרית
112	6. גופים במרחב
115	7. קואורדינטות גליליות וכדוריות
119	8. נספח – משטחים ממעלה שנייה

קווים ותחומים במישור

שאלות

1) שרטטו במישור את התחומים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid -1 \leq x^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 4\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומים הבאים :

א. $S = \{(x, y) \mid x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid |y - 2x| \leq 1\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid |x| + y < 4\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid (x + y)^2 \leq 4, x > 1\}$

3) מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים :

א. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

ב. $x^2 + y^2 - 8y = -15$

ג. $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y = \sqrt{1 - x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

ג. $x = \sqrt{1 - y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1 - y^2}$

ה. $0 \leq x \leq 1 \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

ו. $-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \quad y = \sqrt{1 - x^2}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y = 2 + \sqrt{1 - (x - 3)^2}$

ב. $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$

ג. $x \geq 3.5, \quad x = 4 - \sqrt{1 - y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

ה. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}\}$

ז. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ח. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq 0\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y + 1 \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

9 שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$

ה. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

ו. $S = \{(x, y) \mid |x - 1| \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2}\}$

10 נתונה המשוואה $25x^2 + 4y^2 - 50x + 16y = 59$.

- א. הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.
- ב. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.
- ג. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.
- ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?
- ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11 שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 \geq 0\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid \frac{1}{2}y + 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq -x^2\}$

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq -x^2\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid y^2 - 2 \leq x \leq -y^2\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 1 - y\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור :

א. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$

ב. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, x^2 + y^2 \leq 16 \right\}$

ג. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1, y \geq \frac{1}{4}x^2 \right\}$

ד. $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \leq 1, x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית

שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $x = t^2 + 1, y = t^2$, $t \geq 0$

ב. $x = \sin t, y = \cos^2 t$, $0 \leq t \leq \pi$

ג. $x = \cos t, y = 4 \sin t$, $\pi \leq t \leq 2\pi$

2) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצאו משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1)+1, y = t(0.5t+1)+1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$ (k קבוע).

3) נתון המעגל $x^2 + y^2 = 8$.

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה $A(2, 2)$ לנקודה $B(-2, -2)$.

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום D , המוגבל מעל הישר AB ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום E , המוגבל בין המעגל הנתון למעגל $x^2 + y^2 = 16$.

$$(4) \quad \text{נתונים שני מעגלים } (x-8)^2 + (y-4)^2 = 25 \text{ ו- } x^2 + y^2 = 25.$$

- א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתחום הכלוא בכל אחד מהמעגלים.
- ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, A ו-B, ותהי הנקודה A בעלת ערך ה- y הגדול יותר.
- מצאו את ההצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין A לבין B. הפרידו לשני מקרים.
- ג. מצאו הצגה אלגברית לתחום החסום בין שני המעגלים.

$$(5) \quad \text{נתונות משוואות של שתי אליפסות: } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

- א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצגתן הפרמטרית.
- ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.
- ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות.
- מצאו את ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

$$(6) \quad \text{נתונה היפרבולה } 4x^2 - y^2 = 4.$$

- א. ההיפרבולה מורכבת משתי מסילות.
- מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ב. הציגו באופן פרמטרי את התחום המוגבל בין ההיפרבולה לבין האסימפטוטות שלה.

$$(7) \quad \text{נתונה המשוואה } 3x^2 - y^2 = 3.$$

- א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.
- ב. הקו מסעיף א' מורכב משתי מסילות.
- מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.
- ג. המסילה C היא חלק של הקו הנתון מהנקודה $A(-2, -3)$ לנקודה $B(-1, 0)$.
- כתבו את C בצורה פרמטרית.
- ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C.

$$(8) \quad \text{חשבו את אורך העקום} \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(9) \quad \text{חשבו את אורך העקום} \quad \begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases} \quad -\pi \leq t \leq 2\pi$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } y = x - 1, x \geq 1 \quad \text{ב. } y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{ג. } x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } y = (x+4)^2 \quad \text{ב. } (x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{ג. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ד. } x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 \quad \text{ה. } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ו. } x^2 - y^2 = 4k^2$$

$$(3) \quad \text{א. } \begin{cases} x(t) = \sqrt{8} \cos t \\ y(t) = \sqrt{8} \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{ב. } \begin{cases} x(t) = \sqrt{8} \cos t \\ y(t) = \sqrt{8} \sin t \end{cases} \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{8}u \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{8}u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{ד. } \begin{cases} x(u, v) = u \cos v \\ y(u, v) = u \sin v \end{cases} \quad \sqrt{8} \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$(4) \quad \text{א. המעגל } x^2 + y^2 = 25 \text{ : מרכז : } (0, 0) \text{ . רדיוס : } 5.$$

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של המעגל}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = 5u \cos v \\ y(u, v) = 5u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של העיגול}$$

$$\text{המעגל } (x-8)^2 + (y-4)^2 = 25 \text{ : מרכז : } (8, 4) \text{ . רדיוס : } 5.$$

$$\begin{cases} x(t) = 8 + 5 \cos t \\ y(t) = 4 + 5 \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של המעגל}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = 8 + 5u \cos v \\ y(u, v) = 4 + 5u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi \quad \text{הצגה פרמטרית של העיגול}$$

$$\text{ב. מקרה 1 : } \begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{מקרה 2 - } \begin{cases} x = 8 + 5 \cos t \\ y = 4 + 5 \sin t \end{cases}, \quad \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \pi$$

$$\text{ג. } \{(x, y) \mid -\sqrt{25 - (y-4)^2} + 8 \leq x \leq \sqrt{25 - y^2}\}$$

$$(5) \quad \text{א. } \begin{cases} x(t) = 2 \cos t, y(t) = \sqrt{2} \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ x(t) = \sqrt{2} \cos t, y(t) = 2 \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\text{ב. } A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), D\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad : DA \text{ המסילה}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq t \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \quad : BC \text{ המסילה}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \arctan(\sqrt{2}) \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi \quad : AB \text{ המסילה}$$

$$\cdot \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq t \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi \quad : CD \text{ המסילה}$$

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

$$D_1: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}u \cos v \\ y(u, v) = 2u \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_3: \begin{cases} x(u, v) = \sqrt{2}u \cos v \\ y(u, v) = 2u \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi \leq v \leq \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi$$

$$D_2: \begin{cases} x(u, v) = 2u \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}u \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + \pi$$

$$D_4: \begin{cases} x(u, v) = 2u \cos v \\ y(u, v) = \sqrt{2}u \sin v \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq 1, \arctan(\sqrt{2}) + \pi \leq v \leq \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi$$

.ד

$$(6) \quad \text{א. אלגברית: ימנית } x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}, \text{ שמאלית } x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}.$$

$$\text{פרמטרית: ימנית } t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = \cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases}, \text{ שמאלית: } t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = 2 \sinh t \end{cases}$$

$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D_1: \begin{cases} x(u, v) = u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R} \quad \text{ב.}$$

$$D_2: \begin{cases} x(u, v) = -u \cosh v \\ y(u, v) = 2u \sinh v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R}$$

$$(7) \quad \text{א. היפרבולה. ב. אלגברית: ימנית } x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}, \text{ שמאלית } x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}.$$

$$\text{פרמטרית: ענף ימני } t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} \text{ וענף שמאלי } t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases}$$

$$\text{ג. } C: \begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \sqrt{3} \sinh t \end{cases} \quad \ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0 \quad \text{ד. 1}$$

(8) 8

(9) $6\pi\sqrt{29}$

קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים :

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1, -1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים :

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0, -4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2, 2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים :

א. המירו את המשוואה $4x - x^2 = 1 + xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r = -4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים :

א. המירו את המשוואה $x^2 + y^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x = 10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y = 4$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. המירו את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.

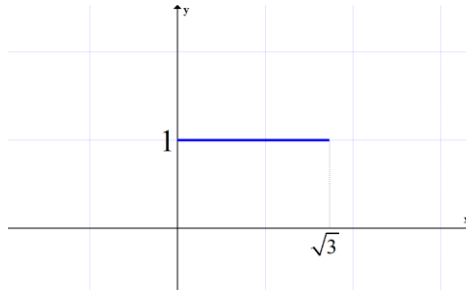
ב. המירו את המשוואה $\theta = \pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשוואה $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

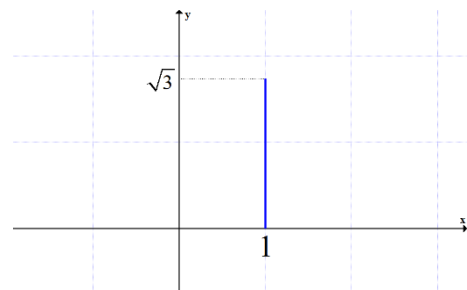
ד. המירו את המשוואה $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

6) להלן שני איורים, שבכל אחד מהם קו. כתבו כל אחד מהקווים בהצגה פולרית.

איור ב



איור א



7) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. כתבו אותו בהצגה פולרית.

א. $y = \sqrt{1-x^2}$

ב. $y = -\sqrt{1-x^2}$

ג. $x = \sqrt{1-y^2}$

ד. $x = -\sqrt{1-y^2}$

ה. $y = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$

ו. $y = \sqrt{1-x^2}, -\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$

8) בסעיפים א-ג הוכיחו שכל אחד מהקווים מתאר חלק ממעגל. שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א. $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$

ב. $x = -\sqrt{6y-y^2}$

ג. $y = -1 + \sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מתאים. מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

10) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

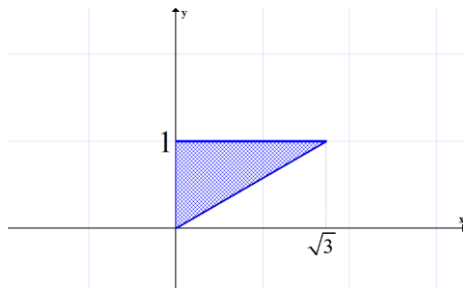
ב. $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

12) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S = \{(x, y) | \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$

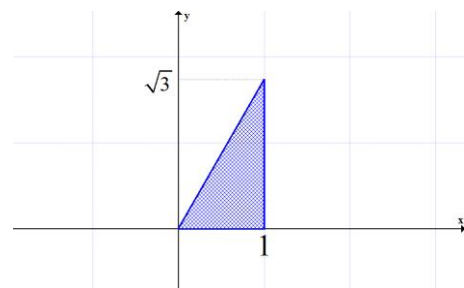
13) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S = \{(x, y) | \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x - x^2}\}$

14) להלן שני איורים, ובכל איור תחום. כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור ב



איור א



תשובות סופיות

$$(1) \quad (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \quad \text{א.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \quad \text{ב.}$$

$$(2) \quad (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \quad \text{א.} \quad (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{ב.} \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{ג.}$$

$$(3) \quad 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \quad \text{א.} \quad (x+2)^2 + y^2 = 2^2 \quad \text{ב.}$$

$$(4) \quad r = 4 \sin \theta \quad \text{א.} \quad r \cos \theta = 10 \quad \text{ב.} \quad r \sin \theta = 4 \quad \text{ג.}$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 = 4^2 \quad \text{א.} \quad y = x \quad \text{ב.} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \quad \text{ג.}$$

$$6 \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3 \cdot y = 4 \sqrt{x^2 + y^2} - x \quad \text{ד.}$$

$$(6) \quad r = \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{א.} \quad r = \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ב.}$$

$$(7) \quad \begin{cases} r=1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \text{א.} \quad \begin{cases} r=1 \\ \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} r=1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} r=1 \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \text{ד.} \quad \begin{cases} r=1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{ה.} \quad \begin{cases} r=1 \\ \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{4}{3}\right) + \pi \end{cases} \quad \text{ו.}$$

$$(8) \quad r = 4 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \quad \text{א.} \quad r = 6 \sin \theta, \quad 0.5\pi \leq \theta \leq \pi \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} r = -2 \sin \theta \\ \pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ or } 1.75\pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{ג.} \quad r = -\frac{1}{\sin \theta}, \quad 1.25\pi \leq \theta \leq 1.75\pi \quad \text{ד.}$$

$$(9) \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{א.} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$(10) \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{א.} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\text{or} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$(11) \quad 1 \leq r \leq 2 \quad \text{א.} \quad 0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2 \quad \text{ב.} \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi$$

$$(12) \quad \frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \quad \text{א.} \quad \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{3}{4}\right) + \pi$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

$$(14) \text{ א. } 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{ב. } 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

משטחים במרחב

שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

זהו ושרטטו את המשטחים הבאים :

$$z = 4x^2 + y^2 + 1 \quad \text{א.}$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \text{ב.}$$

זהו כל אחד מהמשטחים הבאים :

$$25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100 \quad \text{א.}$$

$$25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0 \quad \text{ג.}$$

מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ לבין המשטח $z = 12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$ (7)

א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$.

מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$ ו- $x^2 + y^2 + z^2 = 64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

נתון המשטח $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$ (9)

א. זהו את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

- 10 נתונים שני משטחים: $R: x^2 - y^2 + 2z^2 = 3$, $Q: 2x^2 - y^2 + z^2 = 3$.
- זהו את המשטחים ושרטטו אותם.
 - הראו כי החיתוך בין R ו- Q הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.
 - המסילה C היא חלק של החיתוך בין R ל- Q . נתון כי $A(-2, -3, 2)$ היא נקודת התחלה של C ו- $B(-1, 0, 1)$ היא נקודת סיום של C . כתבו את C בצורה פרמטרית.
 - מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C .

• בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

תשובות סופיות

- אליפסואיד.
- פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
- היפרבולואיד חד יריעתי.
- א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 1)$ ונפתח כלפי מעלה.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 3)$ ונפתח כלפי מטה.
- א. אליפסואיד.
ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1, 2, 0)$ ונפתח כלפי מעלה.
ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 10)$.
- החיתוך הוא מעגל $x^2 + y^2 = 25$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 12)$.
- א. ספירה שמרכזה $(4, 1, -10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.
- נקודות החיתוך הן $A(7, 0, -12)$, $B\left(\frac{59}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9}\right)$.
- החיתוך הוא המעגל $x^2 + y^2 = 15$, שמרכזו בנקודה $(0, 0, 7)$.
- א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y .
ב. $\ell_1: (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$ $\ell_2: (x, y, z) = (3, 2t, t)$
- א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי. ב. $z = -x, z = x$.
ג. $\ln(2 - \sqrt{3}) \leq t \leq 0$ $C: x = -\cosh t, y = \sqrt{3} \sinh t, z = \cosh t$. ד. $\sqrt{2}$.

גופים במרחב

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}$

ו. $V = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 0\}$

ז. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

ד. $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$

ה. $V = \{(x, y, z) \mid 1 \leq z \leq 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

ו. $V = \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} \right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{3(x^2 + y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 3, x \geq 0, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq 4\}$

ה. $V = \left\{ (x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\}$

4) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

5) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

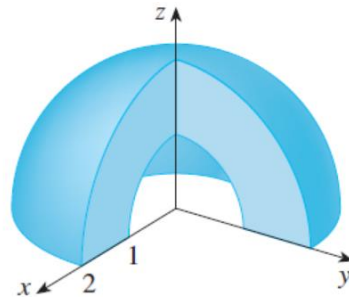
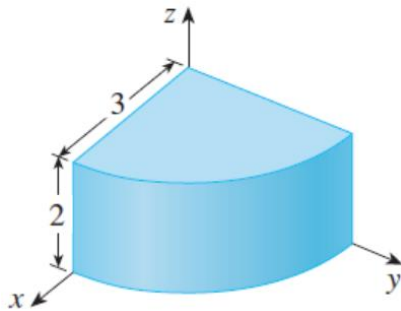
ה. $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף V במרחב.

תארו במילים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית $V = \{(x, y, z) \mid \dots\}$.

א.

ב.



7) נתונים המשטחים $z = x^2 + y^2$ ו- $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

(8) נתונים שני משטחים: $z = x^2 + y^2 + z^2$ ו- $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית

$$V = \{(x, y, z) \mid ? \leq z \leq ??\}$$

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

$$M : x^2 - y^2 + 2z^2 \leq 3$$

$$N : 2x^2 - y^2 + z^2 \leq 3$$

(9) תחומים תלת-ממדיים M ו- N נתונים על ידי

תחום תלת-ממדי W הוא החיתוך בין M ל- N .

שרטטו את D , החיתוך של W עם המישור $y=1$ (במערכת צירים xz),

וכתבו את D בהצגה פרמטרית.

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר GooL.co.il

קואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

- (1) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית. מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית. מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $z = 3$

ב. $z = 4x^2 + 4y^2$

ג. $x^2 + y^2 = 4$

- (2) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית. מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית. מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

ב. $2x + 3y + 4z = 1$

ג. $x^2 = 16 - z^2$

ד. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

- (3) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת גלילית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.

א. $r = 3$

ב. $z = r^2$

ג. $z = r$

ד. $\theta = \frac{\pi}{4}$

ה. $r = 4 \sin \theta$

ו. $r^2 \cos 2\theta = z$

- (4) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א. $r = 3$

ב. $\theta = \frac{\pi}{3}$

ג. $\phi = \frac{\pi}{4}$

ד. $r = 2 \sec \phi$

ה. $r = 4 \cos \phi$

- (5) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית. הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $r \sin \phi = 1$

ב. $r \sin \phi = 2 \cos \theta$

ג. $r - 2 \sin \phi \cos \theta = 0$

- (6) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}\}$

- (7) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

- (8) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב. תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ג. $V = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$

ד. $U = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 10 - y, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

תשובות סופיות

1) א. מערכת גלילית: $z = 3$. מערכת כדורית: $r = \frac{3}{\cos \phi}$. שם המשטח: מישור.

ב. מערכת גלילית: $z = 4r^2$. מערכת כדורית: $r = \frac{\cos \phi}{4 \sin^2 \phi}$.

שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת גלילית: $r = 2$. מערכת כדורית: $r = \frac{2}{\sin \phi}$. שם המשטח: גליל.

2) א. מערכת גלילית: $r^2 + z^2 = 9$. מערכת כדורית: $r = 3$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת גלילית: $r(2 \cos \theta + 3 \sin \theta) + 4z = 1$.

מערכת כדורית: $r(2 \cos \theta \sin \phi + 3 \sin \theta \sin \phi + 4 \cos \phi) = 1$.

שם המשטח: מישור.

ג. מערכת גלילית: $r^2 \cos^2 \theta + z^2 = 16$. מערכת כדורית: $r^2(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) = 16$. שם המשטח: גליל.

ד. מערכת גלילית: $z = r$. מערכת כדורית: $\phi = \frac{\pi}{4}$. שם המשטח: חרוט.

3) א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 = 9$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $z = x^2 + y^2$. שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת קרטזית: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $y = x$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. שם המשטח: גליל.

ו. מערכת קרטזית: $z = x^2 - y^2$. שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

4) א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת קרטזית: $y = \sqrt{3}x$. שם המשטח: מישור.

ג. מערכת קרטזית: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $z = 2$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$.

שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה $(0, 0, 2)$ ורדיוסה 2.

5) א. מערכת קרטזית: $x^2 + y^2 = 1$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. שם המשטח: גליל.

ג. מערכת קרטזית: $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$. שם המשטח: ספירה.

6) א. $V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 2 - r^2\}$

ב. $V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq \sqrt{6 - r^2}\}$

$$(7) \quad \text{א. } V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{0.5}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq 1 - r^2\}$$

$$\text{ב. } V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi, 0 \leq z \leq 4 - r^2\}$$

$$(8) \quad \text{א. } V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\}$$

$$\text{ב. } V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\}$$

$$\text{ג. } V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\}$$

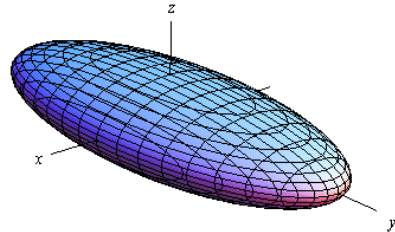
$$\text{ד. } V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 10 - r \sin \theta\}$$

נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

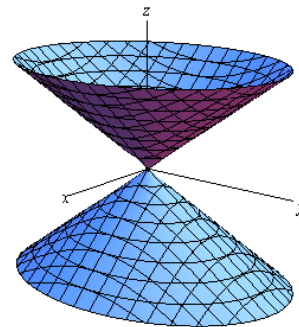
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות;
כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a = b = c$,
נקבל כדור עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

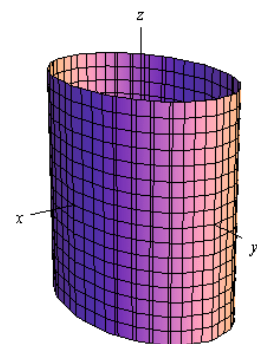
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית);
החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות.
החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו
הם היפרבולות.
* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע
לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים
במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו-
 yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים
מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא
 $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.
* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע
במשוואת הגליל.

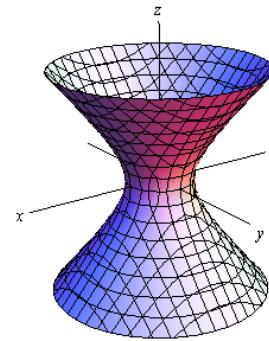


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

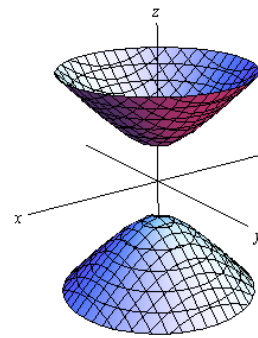
* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

**היפרבולואיד דו-יריעתי**

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

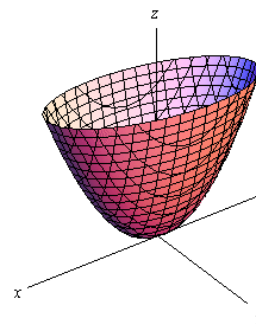
**פרבולואיד אליפטי**

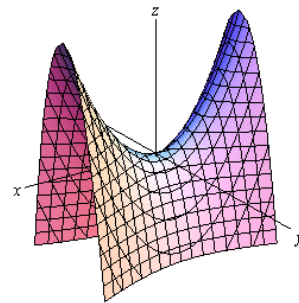
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



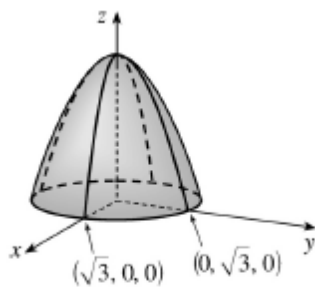
פרבולואיד היפרבולי

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

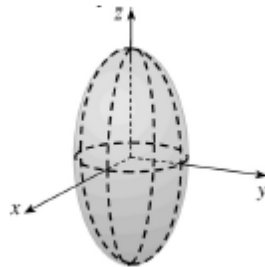
תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

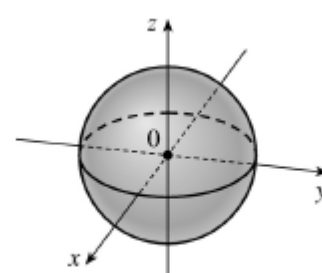
* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

דוגמאות שונות

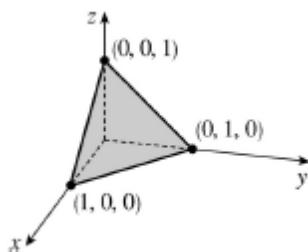
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



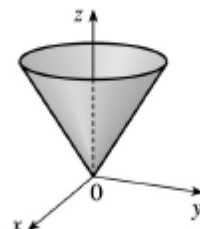
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



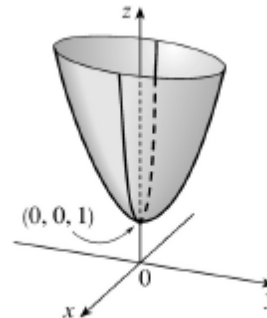
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

חדוא 2

פרק 8 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים

1. מבוא לפונקציה של שני משתנים 122
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים 124
3. משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים 126
4. נספח – משטחים ממעלה שנייה 127

מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x+4y} + \sqrt{x-4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y+4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left(\frac{x-4y}{x+4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln[x \ln(y-4x)] \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (11)$$

(ענו על סעיף א בלבד)

$$f(x, y) = \tan \frac{y}{x} \quad (12)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

$$f(x, y) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{\ln(x^2 + y^2 - 1)} \quad (13)$$

(רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x+1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x+1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (12)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \neq 2 < 4 \right\} \quad (13)$$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-6, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטטו מפת קווי גובה:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטטו את קו הגובה k :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

א. שרטטו את קו הגובה $f(x, y) = 0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x, y) = C$ הוא קו רציף? ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
 ** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

(1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .

(2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

(3) כל המישור.

(4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.

(5) $y < x^2$

(6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר: GooL.co.il

משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

שאלות

- (1) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} - z$. מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטטו אותו.
- (2) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z + x^2 + y^2$. מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטטו אותו.
- (3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את משטחי הרמה:
 - א. $f(x, y, z) = 4^{x+y-z}$
 - ב. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$
- (4) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$. מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.
- (5) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2$. מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

תשובות סופיות

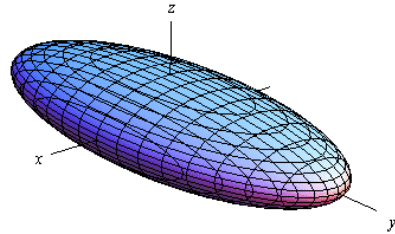
- (1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0, 0, -2)$ ורדיוסה 2.
- (2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0, 0, 4)$ ונפתח כלפי מטה.
- (3) א. מישורים.
ב. משטח רמה k הוא פרבולואיד אליפטי, שמרכזו בנקודה $(0, 0, k)$ ונפתח כלפי מעלה.
- (4) עבור $k < 0$ לא קיים משטח רמה k .
עבור $k = 0$ נקודה $(0, 0, 0)$. עבור $k = 1$ מישורים.
עבור $k > 1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- y .
עבור $0 < k < 1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- z .
- (5) עבור $k < 0$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $k = 0$ חרוט אליפטי.
עבור $k < 0$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

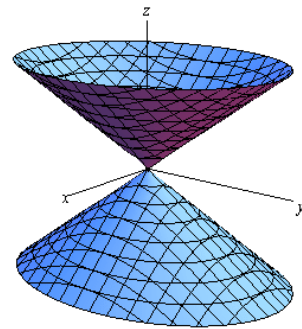
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a = b = c$, נקבל כדור עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

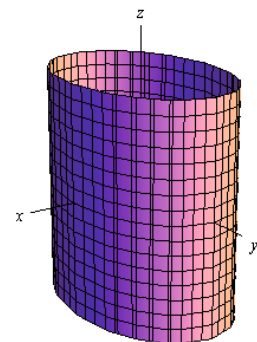
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

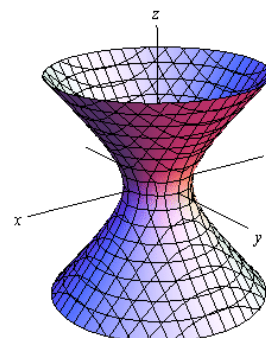
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. * מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים. * מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

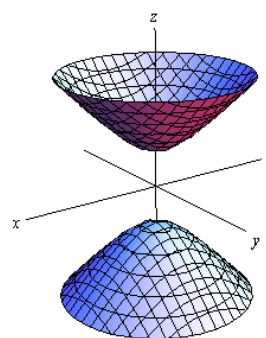


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

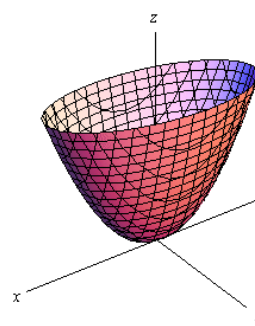
* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

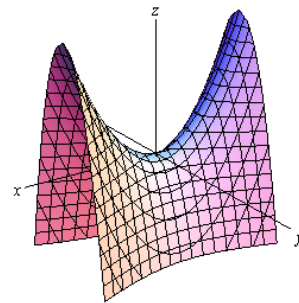
פרבולואיד אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

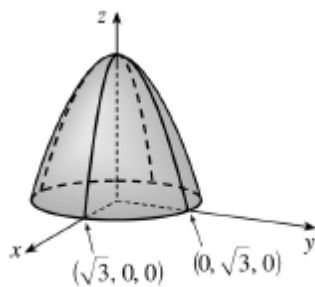
פרבולואיד היפרבולי

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

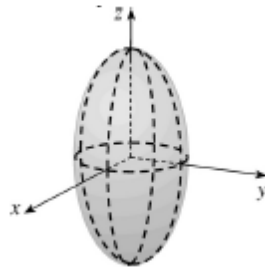
תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

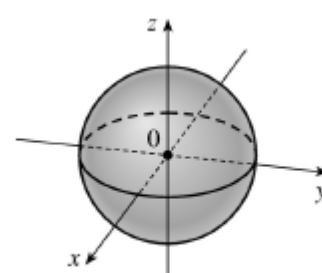
* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

דוגמאות שונות

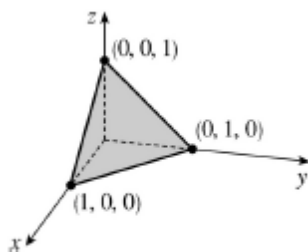
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



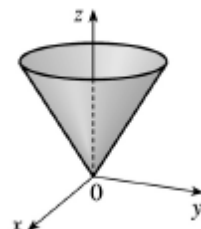
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



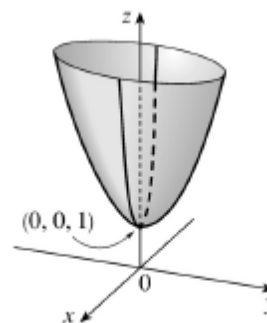
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

חדוא 2

פרק 9 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. גבול של פונקציה של שני משתנים 130
2. רציפות של פונקציה של שני משתנים 133
3. נוסחאות – גבולות 136

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-9 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy - 6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x + y - 3)}{\ln(x + y - 2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1^+, 1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x + 2y - 3})}{x + 2y - 3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x + y - 3} - 1}{2x + y - 4} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (7)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2 + z^2))}{xy^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (9)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 10-17 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (11)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (10)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (13)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (17)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (16)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 18-25 :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2 + yx + y^4} \quad (19)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (18)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (21)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (20)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 y - 5y^4}{x^2 + 4y^2} \quad (23)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (22)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (25)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (24)$$

* בשאלות 18, 20-23 ו-25 מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

(26) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^3 + y^2}$.

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 + y^2}$.

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^3 + y^2}$.

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$, וחשבו את הגבול $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x^3 y + 1)}{x^3 + y^2}$.

* קחו בחשבון שייתכן שהגבול הידוע לא יינתן בגוף השאלה.

(27) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sin x + \cos y) = 1$

(28) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} x^2 y = 4$

(29) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 4}} 2x^2 y = 8$

תשובות סופיות

1 (1)

$\frac{1}{12}$ (2)

1 (3)

0 (4)

אינסוף. (5)

$\frac{1}{2}$ (6)

2 (7)

5 (8)

0 (9)

(10) – (17) אין לפונקציה גבול.

0 (18)

0 (19)

0 (20)

0 (21)

3 (22)

0 (23)

0 (24)

0 (25)

0 א-ד. (26)

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

בשאלות 4-5 בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2 + \sin^2(y-4)} & (x, y) \neq (1, 4) \\ 0 & (x, y) = (1, 4) \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + 5y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \quad \text{נתון}$$

כאשר m קבוע.

עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

7 נתונה פונקציה ממשית רציפה $f = f(x)$, שאינה פונקציה קבועה,

$$g(x, y) = \begin{cases} f\left(\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 5y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0, 0)$?

8 הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, y) \text{ לכל } y,$$

$$\text{וגם } \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = f(x, 0) \text{ לכל } x,$$

$$\text{אז } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0, 0).$$

9 פונקציה $f(x, y)$ מקיימת $|f(x, y)| \leq \sin^2(x^4 + y^4)$ לכל (x, y) .

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$.

10 מה צריך להיות הערך של הקבוע k (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ k & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

תהיה רציפה בכל המרחב?

11 נתון כי:

לכל x מתקיים $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq |y_2 - y_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה y).

לכל y מתקיים $|f(x_2, y) - f(x_1, y)| \leq |x_2 - x_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה x).

הוכיחו כי $f(x, y)$ רציפה בכל המישור.

12 הוכיחו או הפריכו:

נתון כי $f(x, y)$ רציפה בכל המישור.

$$z(x, y) = \frac{f(x, y)}{\sqrt{(x-y)^2 - 100}}$$

ידוע כי $z(1, 14) < 0$, $z(14, 1) > 0$.

אז בתחום ההגדרה של z קיימת נקודה (c_1, c_2) כך ש- $z(c_1, c_2) = 0$.

תשובות סופיות

- (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0)=1$, הפונקציה תהיה רציפה.
- (2) הפונקציה רציפה.
- (3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (4) הפונקציה רציפה.
- (5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
- (6) עבור $m > 1$ הפונקציה רציפה, ועבור $m \leq 1$ הפונקציה לא רציפה.
- (7) הפונקציה לא רציפה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) $k = 0$
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.

נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\arctan(0) = 0$	$\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

חדוא 2

פרק 10 - נגזרות חלקיות דיפרנציאביליות

תוכן העניינים

137	1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון
139	2. נגזרות חלקיות מסדר שני
143	3. נגזרות חלקיות לפי הגדרה
145	4. דיפרנציאביליות

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות 1-10 חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3) \quad (רק f_x)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8) \qquad f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin(ut) \quad (10) \qquad f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (9)$$

$$(11) \text{ נתון } z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$\text{הוכיחו כי } x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$$

$$(12) \text{ נתון } f(x, y, z) = e^x \left(y^2 - \frac{1}{z} \right)$$

$$\text{חשבו } \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right)$$

הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \quad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \quad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

(11) שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = 4 \quad (12)$$

הערת סימון

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f &= f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{aligned}$$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות 1-14 חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (13)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (14)$$

15) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$.

16) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

17) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

18) נתון $f(x,y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$.

חשבו $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,e)$.

הערת סימון

$$\begin{aligned}
 f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x,y) \Rightarrow f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{aligned}$$

תשובות סופיות

$$\begin{aligned}
 f_y &= -2x^2y + 10 & f_{xx} &= 8 - 2y^2 & f_x &= 8x - 2xy^2 + 4 & (1) \\
 f_{yx} &= -4xy & f_{xy} &= -4xy & f_{yy} &= -2x^2 \\
 f_y &= \frac{x^4}{y} & f_{xx} &= 12x^2 \ln y & f_x &= 4x^3 \ln y & (2) \\
 f_{yx} &= \frac{4x^3}{y} & f_{xy} &= \frac{4x^3}{y} & f_{yy} &= -\frac{x^4}{y^2} \\
 f_y &= 3y^2 - 6x & f_{xx} &= 6x & f_x &= 3x^2 - 6y & (3) \\
 f_{yx} &= -6 & f_{xy} &= 6 & f_{yy} &= 6y \\
 f_y &= 3y^2 + 3 - 3x - 6y & f_{xx} &= 6x & f_x &= 3x^2 + 3 - 3y & (4) \\
 & & f_{xy} &= -3 & f_{yy} &= 6y - 6 \\
 f_y &= x^2 - 2xy & f_{xx} &= 2y & f_x &= 2xy - y^2 & (5) \\
 & & f_{xy} &= f_{yx} = 2x - 2y & f_{yy} &= -2x \\
 & & f_x &= 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] & (6) \\
 & & f_y &= 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0] \\
 & & f_{yy} &= 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] & f_{xx} &= 2[8y - 0 - 24] \\
 & & & & f_{xy} &= 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0] \\
 f_y &= e^{xy}(x^2 + xy + 1) & f_x &= e^{xy}(xy + y^2 + 1) & (7) \\
 f_{yy} &= e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy} & f_{xx} &= e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy} \\
 & & f_{xy} &= e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy} \\
 f_y &= e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) & f_x &= e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) & (8) \\
 & & , f_{xx} &= e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y} \\
 & & f_{yy} &= e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y} \\
 & & f_{xy} &= e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y} \\
 f_y &= e^{-x^2-y^2}(4y - 2x^2y - 4y^3) & f_x &= e^{-x^2-y^2}(2x - 2x^3 - 4xy^2) & (9) \\
 & & f_{xx} &= e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & & f_{yy} &= e^{-x^2-y^2}(-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2} \\
 & & f_{xy} &= e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}
 \end{aligned}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \quad f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \quad f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \quad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \quad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \quad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x+4y) \quad f_x = 10 \cos(10x+4y) \quad (13)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x+4y) \quad f_y = 4 \cos(10x+4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x+4y) \quad f_{xy} = -40 \sin(10x+4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z \quad f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (14)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0 \quad f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x \quad f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

$$-2 \quad (15)$$

$$-1 \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e}\right) \quad (18)$$

$$16$$

נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

שאלות

$$(1) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0, 0)$.
 ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$?
 ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$(2) \quad \text{מצאו את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0)$.

$$(3) \quad \text{מצאו את הנגזרות החלקיות של} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y + x^2)^2}{y^2 + x^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0)$.

$$(4) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0, 0)$.
 ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0, 0)$ וחשבו אותן.

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.
 ב. האם הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה $(0, 0)$?

$$(6) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. בדקו האם $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0, 0)$?

ג. האם $f_{xyxy}(1, 4) = f_{xyxyyx}(1, 4)$.

הערה

תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת דיפרנציאביליות – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

תשובות סופיות

(1) א. $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$. ב. לא רציפה בנקודה $(0, 0)$.

ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

(2) $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 0$

(3) $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$

(4) א. שאלת הוכחה. ב. $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$

(5) א. $f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
ב. לא רציפות.

$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + 4x^2y^3 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(6) א. $f_{xy}(0, 0) = -1 \neq f_{yx}(0, 0) = 1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0, 0)$. ג. כן.

דיפרנציאביליות

שאלות

בשאלות 1-4 בדקו האם הפונקציה הנתונה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x + y}{y + 4x} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (5) \quad \text{בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^m \sin y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6) \quad \text{נתון } m, \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
 ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
 ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

$$(7) \quad \text{נתון} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^m} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad m, f(x, y) \text{ קבוע.}$$

- א. עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?
 ב. עבור אילו ערכים של m הפונקציה גזירה חלקית בראשית?
 ג. עבור אילו ערכים של m הפונקציה דיפרנציאבילית בראשית?

(8) תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

$$\phi(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy \geq 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \quad \text{נגדיר פונקציה חדשה}$$

$$\text{נתון} \quad f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = f(0, 0) = 0$$

הוכיחו ש- ϕ דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

$$(9) \quad \text{בדקו דיפרנציאביליות} \quad f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z \sin(xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{3}}} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0, 0)$.

$$(10) \quad \text{נתונה } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ המוגדרת על ידי} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \|x\|^2} - 1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0.5 & x = 0 \end{cases}$$

האם f דיפרנציאבילית בנקודה $x = 0$?

תשובות סופיות

- (1) לא דיפרנציאבילית.
- (2) דיפרנציאבילית.
- (3) לא דיפרנציאבילית.
- (4) לא דיפרנציאבילית.
- (5) דיפרנציאבילית בכל נקודה במישור.
- (6) א. $m > 1$ ב. $m > 0$ ג. $m > 2$
- (7) א. $m < 1$ ב. לכל m ג. $m < 0.5$
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) דיפרנציאבילית.
- (10) כן.

חדוא 2

פרק 11 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

1. כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים 148

כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים

בתרגילים בפרק זה, הניחו שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

שאלות

(1) נתון: $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^2$, $z = \ln(x^2 - y^2)$
חשבו: z_u , z_v

(2) נתון: $v = 4t + k$, $u = t^2 + 4m$, $z = e^{u-v}$
חשבו: z_t , z_m , z_k

(3) נתון: $z = f(x^2 - y^2)$
הוכיחו: $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$

(4) נתון: $z = f(xy)$
הוכיחו: $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$

(5) נתון: $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$
הוכיחו: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$

(6) נתון: $z = f(x - y, y - x)$
הוכיחו: $z_x + z_y = 0$

(7) נתון: $w = f(x - y, y - z, z - x)$
הוכיחו: $w_x + w_y + w_z = 0$

(8) נתון: $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$
הוכיחו: $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$

(9) נתון: $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$

הוכיחו: $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$

(10) נתון: $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$

הוכיחו: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$

(11) נתון: $u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$

הוכיחו: $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$

(12) נתון: $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$

הוכיחו: $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$

(13) נתון: $u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$

הוכיחו:

א. $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$

ב. $u_{xy} = u_{yx}$

ג. חשבו את $u_{xy}(1, \pi)$, אם ידוע ש- $g'(0) = 1$, $f'(0) = 2$.

(14) נתון: $y = r \sin \theta$, $x = r \cos \theta$, $u = f(x, y)$

א. הוכיחו: $(u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$

ב. הוכיחו: $u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$

ג. הוכיחו: $f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$

15 נתון $z = h(u, v)$, ונתון כי $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ מקיימות את משוואת קושי-רימן, כלומר מקיימות $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. הוכיחו כי:

א. u, v מקיימות את משוואת לפלס.
 כלומר, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ וכן $v_{xx} + v_{yy} = 0$.
 ב.
$$h_{xx} + h_{yy} = \left((u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$$

16 נתון: $y = r \sinh s$, $x = r \cosh s$, $u = f(x, y)$. הוכיחו כי:

$$(u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$$

17 פונקציה $f(x, y)$ תיקרא הומוגנית מסדר n , אם $f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y)$. הוכיחו כי אם f הומוגנית, אז:

א. $x \cdot f_x + y \cdot f_y = n \cdot f(x, y)$
 ב. $x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} + 2xy f_{xy} = n(n-1) \cdot f(x, y)$

18 נתונה הפונקציה

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.
 ב. נתון $x = 2t, y = t$. חשבו את $z'(0)$ באופן ישיר.
 ג. נתון $x = 2t, y = t$. חשבו את $z'(0)$ לפי כלל השרשרת.
 ד. בעזרת תוצאת סעיף ג' בלבד, קבעו האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

תשובות סופיות

$$z_u = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x \cdot 2 + \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \cdot 2u \quad (1)$$

$$z_t = e^{u-v} (1) \cdot 2t + e^{u-v} (-1) \cdot 4, \quad z_m = e^{u-1} (1) \cdot 4, \quad z_k = e^{u-v} (-1) \cdot 1 \quad (2)$$

$$-e \quad \text{ג.} \quad (13)$$

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad \text{א.} \quad (18) \quad \text{ב.} \quad \frac{4}{5} \quad \text{ג.} \quad 0 \quad \text{ד.} \quad \text{לא דיפרנציאבילית.}$$

שאר השאלות הן שאלות הוכחה, לפתרונות מלאים היכנסו לאתר GooL.co.il

חדוא 2

פרק 12 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

תוכן העניינים

1. נגזרת מכוונת וגרדיאנט 152

נגזרת מכוונת וגרדיאנט

שאלות

(1) תהי $f(x, y) = x^2 + y^2$.

א. חשבו את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3, 4)$.
מהי משמעות התוצאה?

ב. הראו שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f , העובר דרך $(3, 4)$.

(2) תהי $f(x, y) = 3x^2y$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

(3) תהי $f(x, y) = x - \sin(xy)$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$,

בכיוון הווקטור $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

(4) תהי $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היחידה, היוצר זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר ה- x .

(5) תהי $f(x, y) = xy^2$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 3)$ בכיוון לנקודה $(4, 5)$.

(6) תהי $f(x, y, z) = x^2y^2z$.

חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(2, 1, 4)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

(7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x, y) , נתון על ידי $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, מצאו את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3, 4)$ בכיוון לנקודה $(2, 6)$.

(8) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$ בנקודה $(0, 0)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

(9) מצאו את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$ בנקודה $(1, 2, -1)$ היא מקסימלית, וחשבו את ערכה.

(10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$, ואני נמצא בנקודה $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליי ללכת?

(11) נתונה הפונקציה $f(x, y) = 4x^2y$.

א. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 30° עם הכיוון החיובי של ציר ה- y .

ג. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1, 2)$, בכיוון הווקטור הנתון בסעיף ב'.

(12) נתונה הפונקציה $f(x, y, z) = x^2yz^4$.

מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה בנקודה $(1, 2, -1)$, בכיוון וקטור היוצר זווית של 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , ו- 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- z . הניחו שהזווית עם ציר ה- y חדה.

(13) נתונה הפונקציה $f(x, y) = xy^2 - x^2y^{-3}$ ונתונה הנקודה $Q(1, 1)$.

א. חשבו את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה Q , בכיוון וקטור שיוצר זווית 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצאו וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 0$.

ג. האם קיים וקטור $\vec{u}$, כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(Q) = 6$?

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + 4y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- א. הוכיחו כי הפונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$.
- ב. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.
- ג. חשבו את $\nabla f(0, 0)$.
- ד. בדקו דיפרנציאביליות הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.
- ה. מצאו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה f בנקודה $(0, 0)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = (1, -1)$.
- ו. הסבירו מדוע הפונקציה אינה דיפרנציאבילית, בדרך שונה מהדרך בסעיף ד'.

$$(15) \text{ הפונקציה } f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2, \text{ מתארת טמפרטורה בנקודה } (x, y, z).$$

- א. מהי הטמפרטורה בנקודה $(2, 4, 1)$?
- ב. אוסף הנקודות (x, y, z) , בהן הטמפרטורה שווה 20° , מהווה משטח מפורסם. מהו?
- ג. נמלה שנמצאת בנקודה $(2, 4, 1)$ רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר. באיזה כיוון עליה לנוע, על מנת שקצב שינוי הטמפרטורה יהיה מקסימלי?
- ד. הנמלה שלנו נמצאת כעת על שולחן בגובה 1 (מישור $z=1$), בנקודה $(2, 4, 1)$. כמו בסעיף ג, היא רוצה להגיע לטמפרטורה גבוהה יותר, אך הפעם אסור לה לעזוב את השולחן. באיזה כיוון עליה לנוע על מנת שקצב השינוי שלה יהיה מקסימלי?

$$(16) \text{ גֵּלָה מוחזקת בנקודה } (2, 1, 14), \text{ שעל המשטח } z = 20 - x^2 - 2y^2.$$

- שחררו את הגֵּלָה והיא התחילה לנוע על המשטח כלפי מטה.
- א. מהו המשטח הנתון?
- ב. מצאו את הווקטור $\vec{u} = (a, b, c)$, המתאר את כיוון הנפילה של הגֵּלָה.

$$(17) \text{ תהי } f = f(x, y) \text{ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, המקיימת:}$$

$$1. \text{ לכל } x, f(x, x^2) = \frac{x^2}{2} + x^4.$$

$$2. \text{ הנגזרת המכוונת של } f(x, y), \text{ בנקודה } (1, 1), \text{ בכיוון הווקטור } \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right),$$

שווה 1.

חשבו את הגרדיאנט של f בנקודה $(1, 1)$.

(18) נתונה $f = f(x, y, z)$ דיפרנציאבילית, המקיימת $f(x, y, x^2 + y^2) = 2x + y$.

נתון כי $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 2, 4) = -\frac{5}{3}$, כאשר $\vec{u} = (-2, 1, 2)$.
חשבו את $\nabla f(0, 2, 4)$.

(19) נתונה הפונקציה $f(x, y) = 12x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

א. חשבו את $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(8, 1)$, בכיוון הווקטור $\vec{u} = (3, 4)$.

ב. בדקו האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

ג. חשבו $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$, בכיוון וקטור $\vec{v}$, היוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ד. באיזה כיוון α , הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ תהיה מקסימלית?
מהו הערך המקסימלי של הנגזרת?

(20) נתונה הפונקציה $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + 20x + 21y & x \neq 0 \\ 21y & x = 0 \end{cases}$

א. עבור אלו ערכים של m מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) < m$, לכל וקטור יחידה $\hat{u}$?

ב. מצאו וקטור יחידה $\hat{u}$, המקיים $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0, 0) = 0$.

הערות סימון

(1) במישור $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$, ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים:

$$\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \text{ או } \vec{u} = (x, y)$$

$$\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

במרחב $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$,

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ או $\vec{v} = (x, y, z)$.

$$\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3 \cdot \mathbf{i} + 4 \cdot \mathbf{j} + 5 \cdot \mathbf{k}$$

(2) יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם $\underline{u}$ או $\mathbf{u}$.

(3) וקטור יחידה יסומן $\hat{u}$.

תשובות סופיות

- (1) א. הגרדיאנט $(6, 8)$. ב. אורך הגרדיאנט 10.
- (2) $\frac{48}{5}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $7.5\sqrt{2}$
- (5) $3\sqrt{13}$ (6) $\frac{88}{3}$ (7) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
- (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(1, 1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$.
- (9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הווקטור $(12, 14, -12)$ ושווה ל-22.
- (10) בכיוון הווקטור $(-2, 2, -2)$.
- (11) א. $8\sqrt{3} + 2$. ב. $8 + 2\sqrt{3}$. ג. $\ell: (1, 2, 4) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 8 + 2\sqrt{3}\right)$
- (12) $\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$
- (13) א. $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}$. ב. $\vec{u} = (5, 1)$ (יש עוד). ג. לא.
- (14) א. הוכחה. ב. $f_x = 1, f_y = 0$. ג. $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$.
- (15) א. 73 מעלות. ב. אליפסואיד. ג. בכיוון הווקטור $(8, 32, 2)$. ד. לא דיפרנציאבילית. ה. 0.
- (16) א. פרבולואיד. ב. $\vec{u} = (4, 4, -32)$. ד. בכיוון הווקטור $(8, 32)$.
- (17) $\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (18) $\nabla f(0, 2, 4) = (2, -3, 1)$
- (19) א. $\frac{67}{5}$. ב. לא דיפרנציאבילית. ג. $12(\cos \alpha - \cos^3 \alpha)^{\frac{1}{3}}$.
- ד. $\text{Max} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = 12\left(2 / \sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}, \alpha = 54.73^\circ$
- (20) א. $m > 29$. ב. $\hat{u} = (21/29, -20, 29)$ (יש אחרים).

חדוא 2

פרק 13 - פונקציות סתומות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

157	1. פונקציות סתומות - הפן הטכני
160	2. פונקציות סתומות - הפן התאורטי
167	3. שימושים גיאומטריים

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

- (1) מצאו את y' , כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$, וחשבו את $y'(0)$.
- (2) מצאו את $y'(1)$, כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.
- (3) מצאו את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x + \ln y = 1$.
- (4) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$ חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.
- (5) נתון $(y = y(x, z) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$ חשבו את $y_x(0,0)$, $y_z(0,0)$.
- (6) נתונה המשוואה $x - y = x \cdot y \cdot f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right)$ הוכיחו כי $x^2 \cdot z_x + y^2 \cdot z_y = z^2$.
- (7) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^3 - 2xz + y = 0$ מצאו $z_{xx}(1,1)$.
- (8) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2,1,-2)$. מצאו את:
 - א. $z_{xx}(2,1)$
 - ב. $z_{xy}(2,1)$
 - ג. $z_{yy}(2,1)$

$$(9) \quad \begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשבו את u_x, v_x, u_y, v_y .

ב. הראו כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

$$(10) \quad \begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

א. חשבו את w_x, w_y .

ב. חשבו y_x, y_w .

$$(11) \quad \begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת משוואות:}$$

הוכיחו כי $z''(x) + y''(x) = 0$.

$$(12) \quad \begin{cases} x \cos u + y \sin u + \ln z = f(u) \\ -x \sin u + y \cos u = f'(u) \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

הוכיחו כי:

$$(z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2 \quad \text{א.}$$

$$z_{xy} = z_{yx} \quad \text{ב.}$$

*הערה: בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנגזרות המעורבות.

תשובות סופיות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (6)$$

$$z_x(1,1) = -16 \quad (7)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, z_{yy}(2,1) = 4 \quad (8)$$

$$u_x = \frac{12v-1}{8uv-1}, u_y = \frac{4v+2}{8uv-1}, v_x = \frac{3-2u}{8uv-1}, v_y = \frac{4u+1}{8uv-1} \quad \left(uv \neq \frac{1}{8} \right) \text{ א.} \quad (9)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -3uv, \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2}(v+u) \quad (u \neq v) \text{ א.} \quad (10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2uv}{v+u}, \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{2}{3(v+u)} \quad (u \neq \pm v) \text{ ב.}$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (11)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (12)$$

פונקציות סתומות – הפן התאורטי

שאלות

(1) נתונה המשוואה $y^5 + y^3 + y = x^2 - 1$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(2,1)$, שבה המשוואה מגדירה

פונקציה $y = f(x)$.

ב. חשבו את $f'(2)$.

ג. בדקו האם מתקיימים תנאי מ.פ.ס בנקודה $(-2,1)$.

ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$ לכל x ממשי.

(2) נתונה המשוואה $x^2 + y + e^y = 17$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(4,0)$, שבה המשוואה מגדירה

פונקציה $y = y(x)$.

ב. בדקו האם העקום המתאר את המשוואה עולה או יורד בנקודה בה

$x = 4$.

ג. הוכיחו ש-מ.פ.ס מתקיים עבור כל נקודה שמקיימת את המשוואה.

ד. הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$ לכל x ממשי.

ה. השוו בין תוצאות סעיף ג' ותוצאות סעיף ד'.

(3) נתונה המשוואה $y^3 - x^3 - 3y^2 + 6x^2 + 3y - 12x + 7 = 0$.

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודה $(2,1)$.

ב. האם המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה?

ג. האם התשובה לסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?

(4) לגבי כל אחת מהמשוואות הבאות הגדירו פונקציה $F(x, y)$ מתאימה,

ובדקו האם קיימת נקודה (x_0, y_0) , כך שמתקיימים תנאי מ.פ.ס.

בדקו בכל מקרה מה ניתן להסיק מהמשפט.

א. $x^2 + y^2 + 4 = 0$

ב. $xy - 40x = 100$

ג. $x^2 - y^2 = 3$

(5) נתונה המשוואה $2x^3 + y^3 - 6xy = 0$.

- א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
- ב. חשבו את y' עבור נקודות אלה.
- ג. מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
- ד. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .

(6) נתונה המשוואה הבאה: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a > 0$).

- א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
- ב. חשבו את y'' עבור נקודות אלה.

(7) נתונה המשוואה $x^2 + y^2 = R^2$.

- א. מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
- ב. בנקודות בהן לא מתקיים משפט הפונקציות הסתומות, קבעו האם קיימת סביבה של הנקודה בה המשוואה מתארת פונקציה $y = f(x)$. עשו זאת בשתי דרכים:
1. על ידי תיאור גרפי של העקום.
2. על ידי חישוב.

(8) נתונה המשוואה $ax^4 + y^4 - xy = 0$, כאשר a קבוע ממשי.

- ידוע שהנקודה $(x_0, 0.5)$ מקיימת את המשוואה, אך לא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה.
- א. מצאו את x_0 ואת הקבוע a .
 - ב. האם קיימות נקודות נוספות, שמקיימות את המשוואה הנתונה אך לא מקיימות את מ.פ.ס? אם כן, מצאו אותן.
 - ג. השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
 - ד. הוכיחו, ללא שימוש בתוכנה גרפית, שעבור הנקודה החיובית שלא מקיימת את מ.פ.ס, לא קיימת סביבה שבה המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x .

(9) נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
- חשבו את y' עבור נקודות אלה.
- מה תוכלו לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
- השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
- ללא שימוש בתוכנה גרפית, קבעו האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה המשוואה מתארת פונקציה.

(10) נתונה המשוואה $(e-2)\ln x + \ln y = y-1$.

- בדקו האם מ.פ.ס מתקיים עבור הנקודה (e, e) .
- כמה נקודות על העקום הנתון מקיימות $x = e$?
- האם התשובה בסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?
- מצאו את כל הנקודות המקיימות את מ.פ.ס.
- חשבו את הנגזרת בנקודות הנ"ל.
- השתמשו בתוכנה גרפית על מנת לקבוע, האם בנקודות בהן לא מתקיים המשפט, ניתן למצוא סביבה שבה המשוואה מגדירה פונקציה $y = f(x)$.
- חזרו על סעיף ו', רק הפעם תנו הוכחה ללא איור.

(11) נתונה המשוואה $y^3 + 6x \sin y = -8$, ונתונה נקודה $(0, -2)$.

- הוכיחו שהמשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x)$ בסביבת הנקודה.
- פתחו את $y(x)$ לטור מקלורן מסדר 2.

(12) ענו על הסעיפים הבאים:

- נסחו את משפט הפונקציות הסתומות עבור $x = g(y)$.
- נתונה המשוואה $x = \ln(x^2 + y^2)$.
- הוכיחו כי קיימת סביבה של הנקודה $(0, 1)$, שבה המשוואה מגדירה את x כפונקציה של y , $x = g(y)$.
- חשבו את $g'(1)$.

13) נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

א. הראו כי קיימת סביבה של הנקודה $(1,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x

כפונקציה של y , $x = g(y)$.

ב. הוכיחו שהנקודה $(1,1)$ היא נקודת מקסימום מקומי של $g(y)$.

14) בסעיפים א-ב, האם המשוואה $3x^2y - yz^2 - 4xz = 7$:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(-1, 1, 2)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $y = y(x, z)$ בסביבת הנקודה $(-1, 1, 2)$?

ג. הוכיחו שהפונקציה $y = y(x, z)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(-1, 2)$.

15) נתונה המשוואה $x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2 = 3z - 1$.

בסעיפים א-ב, על סמך מ.פ.ס, האם המשוואה:

א. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(1, 2, 0)$?

ב. מגדירה פונקציה סתומה $z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(4, 4, 1)$?

ג. הוכיחו, ללא שימוש במ.פ.ס, שהמשוואה מגדירה פונקציה סתומה

$z = z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(4, 4, 1)$.

16) נתונה המשוואה $\sin(x + y) + \sin(y + z) = 1$.

מצאו נקודה שבסביבה שלה המשוואה מגדירה פונקציה $y = y(x, z)$,

ומצאו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה המתאימה.

17) נתונה מערכת המשוואות:

$$1) x = u + v, \quad 2) y = u^2 + v^2, \quad 3) w = u^3 + v^3$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $w = w(x, y)$,

בנקודה $(x, y, u, v, w) = (1, 1, 0, 1, 1)$.

במידה שכן, חשבו בנקודה את w_x, w_y .

ב. חזרו על סעיף א', עבור הנקודה $(x, y, u, v, w) = (2, 2, 1, 1, 2)$.

ג. האם קיימת סביבה של הנקודה $(x, y, u, v, w) = (2, 2, 1, 1, 2)$, שבה מערכת

המשוואות מגדירה פונקציה $w = w(x, y)$?

במידה שכן, חשבו בנקודה את w_x, w_y .

ד. מצאו את כל הנקודות במישור, עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה

עבור $w = w(x, y)$.

(18) נתונה מערכת המשוואות :

$$1) x = a \cos \phi \cos \theta, \quad 2) y = b \sin \phi \cos \theta, \quad 3) z = c \sin \theta \quad (a, b, c > 0)$$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $\phi = \phi(x, y)$,

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את ϕ_x, ϕ_y .

בדקו את התשובה על ידי חישוב ישיר.

ב. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $z = z(\phi, x)$,

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}.$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את z_ϕ, z_x .

תשובות סופיות

- (1) א. הוכחה. ב. $\frac{4}{9}$. ג. כן. ד. הוכחה.
- (2) א. הוכחה. ב. העקום יורד. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. תוצאת סעיף ד' טובה יותר.
- (3) א. לא מתקיימים. ב. כן. ג. לא.
- (4) א. לא קיימת. ב. הנקודה $(1, 140)$ למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס. ג. הנקודה $(2, 1)$ למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
- (5) א. כל נקודה (x, y) שעל המשוואה, ואשר שונה מהנקודות $(0, 0)$, $(2, 2)$.
- (6) א. כל נקודה על העקום הנתון אשר שונה מהנקודות $(0, 0)$, $(\sqrt[3]{4a}, \sqrt[3]{2a})$.
 ב. $y' = -\frac{2x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$ ג. כלום! ד. לא.
- (7) א. כל הנקודות על המעגל אשר שונות מהנקודות $(R, 0)$, $(-R, 0)$.
 ב. לא קיימת סביבה כנדרש.
- (8) א. $x_0 = \frac{1}{2}$, $a = 3$. ב. כן, $(0, 0)$, $(-0.5, -0.5)$. ג. לא. ד. שאלת הוכחה.
- (9) א. כל נקודה (x, y) שעל $xy = \ln y - \ln x + 1$, ואשר שונה מהנקודה $(1, 1)$.
 ב. $y' = -\frac{y + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{y}}$ ג. כלום! ד. לא קיימת.
- (10) א. כן. ב. שתי נקודות. ג. לא. ד. כל נקודה על העקום אשר שונה מהנקודה $(1, 1)$.
 ה. $y'(x) = \frac{(2-e)y}{x(1-y)}$ $(x > 0, y > 0, (x, y) \neq (1, 1))$ ז. שאלת הוכחה. ח. לא ניתן.
- (11) א. שאלת הוכחה. ב. $p_2(x) = -2 + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot x + \frac{1}{8} \sin 2(\sin 2 - 2 \cos 2)x^2$.
- (12) א. ראה סרטון. ב. שאלת הוכחה. ג. $g'(1) = -2$.
- (13) א. הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- (14) א. לא. ב. כן. ג. שאלת הוכחה.
- (15) א. כן. ב. לא ניתן לדעת. ג. שאלת הוכחה.
- (16) הנקודה היא $(0, 0, 0.5\pi)$ והנגזרות הן: $y_x(0, 0, 0.5\pi) = -1$, $y_z(0, 0, 0.5\pi) = 0$.

ב. לא מתקיימים.

$$(17) \quad \frac{\partial w}{\partial y}(1,1) = \frac{3}{2}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(1,1) = 0 \quad \text{א.}$$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{2}x^2 \right\} \quad \text{ד.}$$

$$\text{ג.} \quad w_x(2,2) = -3, \quad w_y(2,2) = 3$$

$$\text{ב.} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2c}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = -c \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(18) \quad \text{א.} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{b}{a\sqrt{3}}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{b}$$

שימושים גאומטריים

שאלות

- (1) נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ ($z < 0$).
מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P, בה $x = -2, y = 1$?
- (2) מצאו משוואה של מישור משיק למשטח $xyz = 8$ בנקודה $(-2, 2, -2)$,
וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.
- (3) מצאו מישור המשיק למשטח $x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2$,
המקביל למישור $x + 8y + 18z = 0$.
- (4) למשטח $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ העבירו מישור המשיק בנקודה כלשהי.
מישור זה חותך את הצירים x, y, z בנקודות A, B, C, בהתאמה.
נסמן: $O = (0, 0, 0)$.
הוכיחו $OA + OB + OC = a$.
(למעשה נוכיח שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)
- (5) נתון המשטח $x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$, ונתונה הנקודה $(1, 2, -1)$.
הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור $x + 3y - 2z = 10$,
בנקודה Q.
מצאו את הנקודה Q.
- (6) הראו שהמשטח $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ מאונך לכל אחד מחברי משפחת
המשטחים $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$, בנקודת החיתוך $(1, -1, 2)$.
- (7) מצאו משוואת הישר המשיק לעקום $C: x = 6\sin t, y = 4\cos 3t, z = 2\sin 5t$,
בנקודה בה $t = \frac{1}{4}\pi$.

(8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון עקום $C: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$,ונתונה נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$, המתקבלת מהצבת $t = t_0$ במשוואות העקום.

הוכיחו כי משוואת המישור הנורמל לעקום היא

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

ב. מצאו את משוואת המישור הנורמל לעקום

$$C: x = 6 \sin t, y = 4 \cos 3t, z = 2 \sin 5t$$

בנקודה בה $t = 0.25\pi$.

(9) נתונות שתי עקומות

$$C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$$

$$C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$$

ונתון כי שתי העקומות נמצאות על משטח S , וכי שתיהן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy .

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. מצאו את משוואת המישור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך שבין שתי העקומות.

$$C_1: x = 2t + 1, y = t^2 - 1, z = t^2 + t$$

(10) נתונות שלוש עקומות

$$C_2: x = s^2, y = -s, z = s - 1$$

$$C_3: x = u + 2, y = u, z = u^2 - 1$$

ונתון כי שלוש העקומות נמצאות על משטח S , וכי שלושתן נחתכות בנקודה הנמצאת במישור xy .

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. האם בנקודה הנ"ל ניתן להעביר מישור משיק למשטח S ? נמקו!

(11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת הישר המשיק לעקום:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

בנקודה P שעליו, היא $\ell: P + t \cdot \nabla F(P) \times \nabla G(P)$.ב. בנקודה $(1, -1, 1)$, מצאו את משוואת הישר המשיק לעקום:

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמשוואת המישור הנורמלי לעקום

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

בנקודה P שעליו, היא $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$,

כאשר $(a, b, c) = \nabla F(P) \times \nabla G(P)$.

ב. בנקודה $(1, -1, 1)$, מצאו את משוואת המישור הנורמלי לעקום:

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

13) נתונה הפונקציה $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, על ידי $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2 + v^2$.

מהן הנקודות שעבורן קיים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה $(u, v) = (1, 0)$.

14) מצאו ביטוי לוקטור היחידה, המאונך למשטח

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u$$

$$u \in [0, \pi], \quad v \in [0, 2\pi]$$

באיזה משטח מדובר?

תשובות סופיות

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (1)$$

$$x - y + z + 6 = 0, (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (2)$$

$$x + 8y + 18z = 21, x + 8y + 18z = -21 \quad (3)$$

שאלת הוכחה. (4)

$$Q(7, -9, -15) \quad (5)$$

שאלת הוכחה. (6)

$$\ell: (x, y, z) = (3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + s(3\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) \quad (7)$$

$$3x - 6y - 5z = 26\sqrt{2} \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (8)$$

$$x - 2z = 1 \quad \text{ב.} \quad P(1, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (9)$$

(10) א. נקבל שנקודת החיתוך היא $P(1, -1, 0)$. ב. לא.

$$(x, y, z) = (1, -1, 1) + t(3, 16, 2) \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (11)$$

$$3x + 16y + 2z = -11 \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (12)$$

$$-2x + z = -1 \quad (0, 0, 0) \quad \text{כל נקודה, למעט} \quad (13)$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{כדור שמרכזו בראשית הצירים, עם רדיוס 1,} \quad (14)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{שנוסחתו:}$$

חדוא 2

פרק 14 - נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים 171
2. הדיפרנציאל השלם - נוסחת הקירוב הליניארי 173

נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים

שאלות

פתחו את הפונקציות בשאלות 1-4 לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה (a, b) :

$$(a, b) = (1, 2) \quad f(x, y) = x^2 y + 3y - 2 \quad (1)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = (1 + y) \ln(1 + x - y) \quad (2)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (3)$$

$$(a, b) = (2, 1) \quad f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - y}{x + y^2}} \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{בעזרת התוצאה של שאלה 2, חשבו בקירוב את } \ln(1.5).$$

$$(6) \quad \text{בעזרת התוצאה של שאלה 3, חשבו בקירוב את } e^3.$$

$$(7) \quad \text{בעזרת התוצאה של שאלה 4, חשבו בקירוב את } \sqrt[3]{2}.$$

תשובות סופיות

$$f(x, y) = 6 + 4(x-1) + 4(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 1 + 4y - x^2 + 7y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{7}{81}(x-2)^2 + \frac{1}{9}(x-2)(y-1) \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (5)$$

$$19 \quad (6)$$

$$\frac{101}{81} \quad (7)$$

הדיפרנציאל השלם – נוסחת הקירוב הליניארי

שאלות

- (1) חשבו בקירוב: $\ln(0.01^2 + 0.99^2)$.
- (2) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצאו בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$.
- (3) נחשב את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו. ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%, ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.
- (4) נתונות שתי צלעות במלבן $a = 10 \text{ cm}$, $b = 24 \text{ cm}$. חשבו את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב-4mm ואת הצלע b יקצרו ב-1mm.
- (5) נמדוד את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על 5%. העריכו את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

תשובות סופיות

- (1) $\cong -0.01$
- (2) $2\frac{7}{3200}$
- (3) 8%
- (4) שינוי מדויק: 0.06472, שינוי מקורב: 0.06153.
- (5) 5%

חדוא 2

פרק 15 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים.....174

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-8, מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

(9) נתון משטח $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$. מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$, וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

- (12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין, על ידי: $Q_1 = 144 + 16P_1 - 24P_2$, $Q_2 = 116 - 30P_1 + 20P_2$. כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

- (13) נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$.
 א. הוכיחו שהנקודה $(0, 0)$ היא נקודה קריטית.
 ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכל, או שלא ניתן לדעת.

- (14) מצאו שני מספרים, $b > a$, כך ש- $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

- (1) $(-0.5, 1)$ אוכל; $(1.5, -3)$ מינימום.
- (2) $(1, 2)$ מינימום; $(-1, -2)$ מקסימום; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוכל.
- (3) $(0, 0)$ אוכל; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ מינימום; $(1, 0)$ מקסימום; $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$ אוכל.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום.
- (6) $(4, 4)$ מקסימום.
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום.
- (8) אין נקודות קריטיות.
- (9) $z = 4$, $z = 3$
- (10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- (12) $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$ רווח מקסימלי 288\$.
- (13) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = 2$, $a = -2$, לא ניתן לדעת; $a > 2$, $a < -2$ אוכל; $-2 < a < 2$ מינימום.
- (14) $a = -6$, $b = 4$

חדוא 2

פרק 16 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) - ריבועים פחותים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה רבת משתנים.....176

קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

שאלות

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות 1-5 :

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) \quad z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

(6) מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה $y = x^2 + 1$, לפרבולה $y = -x^2 + 2x$.
* לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות 7-11 נתונות n נקודות, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y = h(x)$, כך ששכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

$$h(x) = ax + b, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5) \quad (7)$$

$$h(x) = ax^2 + bx, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (-1, 2), (2, 0), (0, -2) \quad (8)$$

$$h(x) = ax + \frac{b}{x}, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4) \quad (9)$$

$$h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}, \text{ הדגימו עבור הנקודות } (4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90) \quad (10)$$

$$(11) \quad h(x) = ax^2 + bx + c, \text{ הדגימו עבור } (1, 4.5), (0.5, 2.3), (0, 0.8), (-1, 0.1), (-0.5, 0.12).$$

$$(12) \quad \text{נתונות } n \text{ נקודות: } (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n).$$

מצאו ישר $y = ax + b$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי.
יש להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות 11 ו-12 ניתן להניח ש- a ו- b , המתקבלים מפתרון המשוואות $f_a = 0, f_b = 0$,

$$\text{נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים } f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2.$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad (t, t) \text{ לכל } t \text{ ממשי, מקסימום.}$$

$$(2) \quad (0, 0) \text{ מקסימום.}$$

$$(3) \quad \text{אין קיצון. } (1, 2) \text{ אוקף.}$$

$$(4) \quad \text{אין קיצון. } (1, 2) \text{ אוקף.}$$

$$(5) \quad (0.5, 1, 1) \text{ מינימום.}$$

$$(6) \quad 0.375$$

$$(7) \quad y = 0.88x + 0.3$$

$$(8) \quad y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$$

$$(9) \quad y = 2.032x + \frac{1.5039}{x}$$

$$(10) \quad y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2}$$

$$(11) \quad y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824$$

$$(12) \quad a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

חדוא 2

פרק 17 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ. 178

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

בשאלות 1-4 מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$$

$$(2) \quad f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$(3) \quad f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13$$

$$(4) \quad f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6$$

$$(5) \quad \text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{xy\} \text{ s.t. } x + 3y = 12, \text{ כאשר } x, y > 0.$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(6) \quad \text{נתונה בעיית הקיצון } \max\{2x + y\} \text{ s.t. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \text{ כאשר } x, y \geq 0.$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(7) \quad \text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12,$$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$(8) \quad \text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצאו את הנקודות}$$

שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית

הצירים הוא מקסימלי.

$$(9) \quad \text{מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר } 3x - 6y + 4 = 0,$$

$$\text{לפרבולה } x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0.$$

$$\text{רמז: מרחק הנקודה } (x_0, y_0) \text{ מהישר } ax + by + c = 0, \text{ הוא } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- 10** מוישליה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצריכת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$.
 מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
 מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
 והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
 נסחו ופתרו את בעיית מוישליה.
- 11** דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = xy$.
 מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
 לדני תקציב של 12 ש"ח.
 נסחו ופתרו את בעיית דני.
- 12** עקומת התמורה בין מנגו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$.
 לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$.
 דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) על עקומת התמורה,
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
 נסחו ופתרו את הבעיה.
- 13** ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$.
 המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2$, $P_L = 1$.
 היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) ,
 המביא למינימום את העלות.
 נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).
- 14** נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x, y)\} \text{ s.t. } p_1x + p_2y = I$.
 תהי (x^*, y^*) נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה.
 הוכיחו כי כופל לגראנז' λ מקיים $\lambda = \frac{x \cdot u_x + y \cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (1)$$

$$\min(0, \pm 1) \quad \max(\pm 1, 0) \quad (2)$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3)$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad (4)$$

$$\max(6, 2) \quad (5)$$

$$\max(9, 36) \quad (6)$$

$$(6, 2) \quad (7)$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (8)$$

$$7 / \sqrt{45} \quad (9)$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad (10)$$

$$\max(6, 2) \quad (11)$$

$$\max(2, 3) \quad (12)$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (13)$$

$$(14) \text{ שאלת הוכחה.}$$

חדוא 2

פרק 18 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים 181

קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

שאלות

- (1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.
- (2) מצאו על פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1, 2, 2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1, 2, 2)$.
- (3) ענו על הסעיפים הבאים:
 - א. מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$.
 - ב. מצאו נקודה על המישור $-2x - 2y + z = 0$, שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1, 2, 3)$.
 - ג. בדקו את התשובה על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.
- (4) מצאו את הנקודות על המשטח $z^2 = xy + 1$ הקרובות ביותר לראשית.
- (5) מצאו את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ למישור $3x + 4y + 12z = 288$. רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz + d = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
- (6) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.
- (7) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פסיקליים או גיאומטריים, היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

תשובות סופיות

- (1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2, 4, 4)$, והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2, -4, -4)$.
- (3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
 ב. הנקודה הקרובה ביותר $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$.
- (4) $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$
- (5) המרחק הקצר ביותר $\frac{256}{13}$. המרחק הארוך ביותר $\frac{320}{13}$.
- (6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
- (7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.

חדוא 2

פרק 19 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה 183

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים – בקבוצה סגורה וחסומה**שאלות**

- (1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם $(0, 5), (3, 0), (0, 0)$.
- (2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0)$.
- (3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ בתחום R , כאשר R הוא העיגול $x^2 + y^2 \leq 4$.
- (4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$.
- (5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$.

תשובות סופיות

- (1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.
- (2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.
- (3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.
- (4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.
- (5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$.

חדוא 2

פרק 20 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

184	1. אינטגרלים כפולים
187	2. החלפת סדר אינטגרציה

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-3 :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy \quad (1)$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr \quad (3)$$

באינטגרל $\iint_D f(x,y) dx dy$, הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר :

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(1,1), A(1,0), O(0,0) \quad (4)$$

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(-2,1), A(2,1), O(0,0) \quad (5)$$

$$D - \text{טרפז בעל הקודקודים : } C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0) \quad (6)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq 1 \quad (7)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq y \quad (8)$$

$$D = \{ (x,y) \mid y \leq 1, y \geq x^2 \} \quad (9)$$

$$D = \{ (x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \} \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$(11) \iint_D xy^2 dx dy, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י הפרבולה } y^2 = 4x \text{ והישר } x = 1.$$

$$(12) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x}}, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה } (2,2).$$

$$(13) \iint_D |xy| dx dy, \text{ כאשר } D \text{ עיגול בעל הרדיוס } a, \text{ שמרכזו בראשית.}$$

$$(14) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ כאשר } D \text{ מקבילית בעלת הצלעות } y = 3a, y = a, y = x + a, y = x \text{ (} a > 0 \text{).}$$

$$(15) \iint_D \frac{\cos y}{y^2 + \pi^2} dA, \text{ כאשר } D \text{ התחום הכלוא בין } x = -1, y = 0, y = \pi, y = \pi\sqrt{x}.$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad 1$$

$$(2) \quad \frac{1}{40}$$

$$(3) \quad \frac{a^3}{3}\pi$$

$$(4) \quad \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$$

$$(5) \quad \int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x, y) dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx$$

$$(6) \quad \int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx$$

$$(7) \quad \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

$$(8) \quad \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx$$

$$(9) \quad \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$

$$(10) \quad \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \\ + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

$$(11) \quad \frac{32}{21}$$

$$(12) \quad 8 - \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

$$(13) \quad \frac{a^4}{2}$$

$$(14) \quad 14a^4$$

$$(15) \quad 0$$

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות 1-6 :

$$\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx \quad (6)$$

$$\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx \quad (5)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז : שנו את סדר האינטגרציה) :

$$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy \quad (8)$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy \quad (7)$$

$$\int_0^4 \int_x^4 \sin(y^2) dy dx \quad (10)$$

$$(x, y \geq 0) \int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2} y dx dy \quad (9)$$

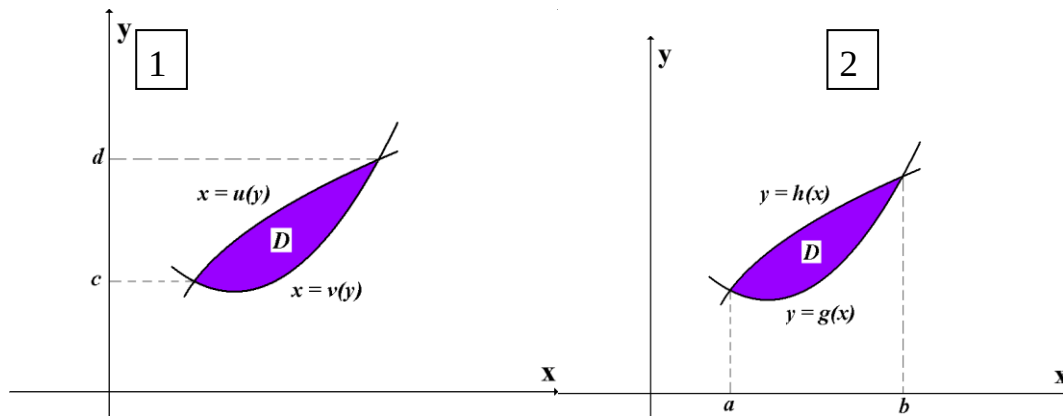
הערות סימון

1

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

2

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$



שימו לב, ישנם מוסדות שבהם לא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dx dy \quad \text{כך:} \quad \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל

הוא חילופי. כלומר הרישומים $dx dy$ ו- $dy dx$ זהים.

תשובות סופיות

$$\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \quad (5)$$

$$\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx \quad (6)$$

$$\frac{1}{3}(e^8 - 1) \quad (7)$$

$$\frac{241}{60} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4}(e - 2) \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 16) \quad (10)$$

חדוא 2

פרק 21 - שימושי האינטגרל הכפול

תוכן העניינים

1. שימושי האינטגרל הכפול.....190

שימושי האינטגרל הכפול

שאלות

בשאלות 1-4 חשבו את שטחי התחומים החסומים ע"י העקומים:

$$x + y = 2, \quad x^2 - 4y = 4 \quad (1)$$

$$(a > 0) \quad xy = a^2, \quad x + y = \frac{5}{2}a \quad (2)$$

$$y^2 = 9 - x, \quad y^2 = 9 - 9x \quad (3)$$

$$x + y = 3, \quad y^2 = 4x \quad (4)$$

בשאלות 5-10 חשבו את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים:

$$z = 1 + x + y, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (5)$$

$$z = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad y = 1, \quad y = x^2 \quad (6)$$

$$(x > 0) \quad z = 0, \quad z = x^2 + y, \quad y = 0.5x, \quad y = 2x, \quad y = \frac{2}{x} \quad (7)$$

$$z = 0, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, \quad 2y^2 = x \quad (8)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = y \quad (9)$$

$$z = x + y, \quad z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (10)$$

11 ללוח דק בצורת משולש, שקדקודיו הם $(0,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$,

יש פונקציית צפיפות $\delta(x,y) = xy$.

א. חשבו את מסת הלוח.

ב. חשבו את מרכז הכובד של הלוח.

12 ללוח דק בצורת מלבן $R = \left\{ (x,y) \mid -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \right\}$,

יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני).

חשבו את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר ה- z .

בטאו את התשובה באמצעות המסה של הלוח, M .

13 מצאו את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2 + z^2 = 4$, הנמצא מעל למלבן

$R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\}$, שבמישור xy .

תשובות סופיות

(1) $\frac{64}{3}$

(2) $a^2 \left(\frac{15}{8} - 2 \ln 2 \right)$

(3) 32

(4) $\frac{64}{3}$

(5) $\frac{5}{6}$

(6) $\frac{88}{105}$

(7) $\frac{17}{6}$

(8) $16\frac{1}{5}$

(9) $\frac{8}{3}$

(10) 36

(11) א. $\frac{1}{24}$ ב. $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right)$

(12) $\frac{M(a^2 + b^2)}{12}$

(13) $\frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5}-1)$

חדוא 2

פרק 22 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

1. מבוא מתמטי לפרק 193
2. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות 195

מבוא מתמטי לפרק

שאלות

1 שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית :

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

2 שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית :

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

3 שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית :

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

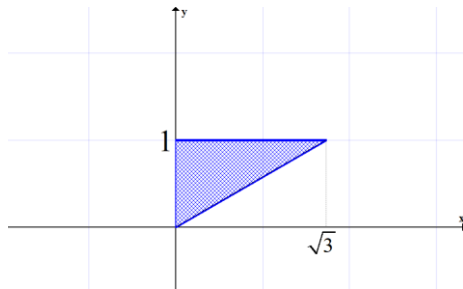
ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

4 הציגו את התחום הבא בצורה פולרית : $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \right\}$

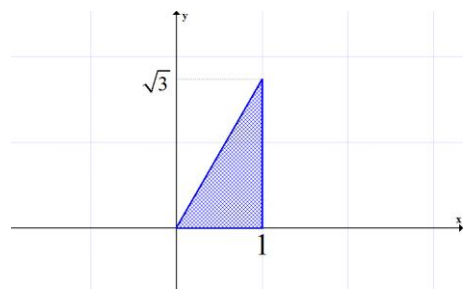
5 הציגו את התחום הבא בצורה פולרית : $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x-x^2} \right\}$

6) להלן שני איורים, ובכל איור תחום. כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור ב



איור א



תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll} \text{א. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} & \text{ג. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{lll} \text{א. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} & \text{ג. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \\ \text{or} & & \\ \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases} & & \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2 \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2, \\ 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi \end{cases} \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{l} \frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \\ \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{3}{4} \right) + \pi \end{array} \quad (4)$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \begin{cases} 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \\ \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{array} \quad (6)$$

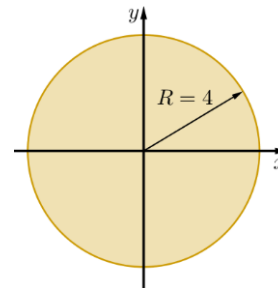
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

שאלות

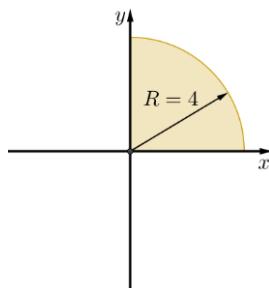
1) חשבו $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$, כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

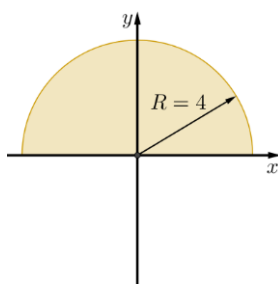
א.



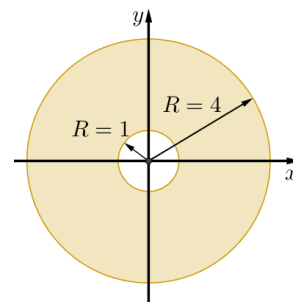
ב.



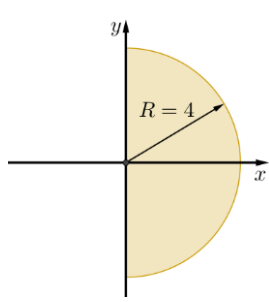
ג.



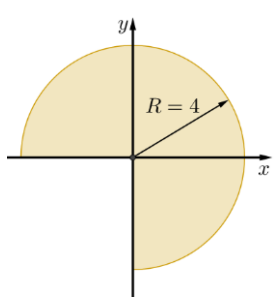
ד.



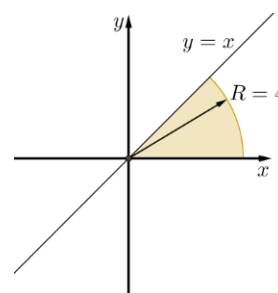
ה.



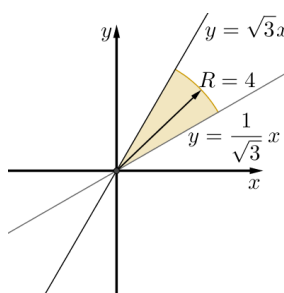
ו.



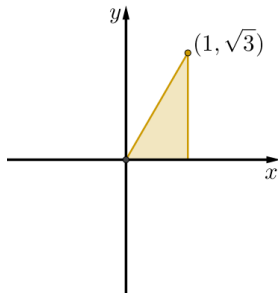
ז.



ח.



ט.



חשבו את האינטגרלים בשאלות 2-17, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (4)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (7)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \quad (6)$$

$$\int_0^2 \int_0^x y dy dx \quad (9)$$

$$\int_0^6 \int_0^y x dx dy \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy \quad (11)$$

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \quad (13)$$

$$\int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad (12)$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy \quad (15)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx \quad (14)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx \quad (17)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1) dx dy \quad (16)$$

בשאלות 18-20 חשבו את נפח הגוף המתואר:

(18) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ לבין הגליל $x^2 + y^2 = 1$.

(19) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 2y$, בין החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מלמעלה לבין המישור xy מלמטה.

(20) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = x$, בין הפרבולואיד $z = 1 - x^2 - y^2$ מלמעלה לבין מישור xy מלמטה.

(21) חשבו את שטח התחום החסום על ידי $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$, $y = x\sqrt{3}$.

תשובות סופיות

- (1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. 42π ה. $\frac{64\pi}{3}$
- ו. 32π ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$
- (2) א. $\frac{\pi}{2}$ ב. π ג. $\frac{\pi}{8}$ ד. $\frac{\pi}{2}$
- (3) π (4) $\frac{\pi}{8}$ (5) $\frac{\pi}{2}$
- (6) πa^2 (7) 2π (8) 36 (9) $\frac{4}{3}$
- (10) $\pi \ln \frac{e}{2}$ (11) $\pi(4-\pi)$ (12) $\frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{e}$ (13) $\frac{\pi(e-1)}{4e}$
- (14) $\frac{\pi}{2} + 1$ (15) $-\frac{4}{5}$ (16) $\pi \ln \frac{4}{e}$ (17) π
- (18) $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$
- (19) $\frac{32}{9}$
- (20) $\frac{5\pi}{32}$
- (21) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

חדוא 2

פרק 23 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרל כפול.....198

החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

שאלות

(1) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $y=3-x$, $y=1-x$, $y=x-1$, $y=x$.

(2) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{xy} dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y=x$, $y=0.5x$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$.

(3) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) dA$, כאשר R הוא התחום בצורת משולש שקדקודיו הם $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.

(4) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R (4x+8y) dA$, כאשר R הוא התחום בצורת מקבילית שקדקודיה הם: $A(-1,3)$, $B(1,-3)$, $C(3,-1)$, $D(1,5)$.

(5) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \sqrt{16x^2+9y^2} dA$, כאשר R הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(6) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R y^2 dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי העקומות $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$, $xy^2=1$, $xy^2=2$.

(7) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{x+y} dA$, כאשר $R = \{(x,y) \mid |x|+|y| \leq 1\}$.

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \ln 3 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}(e^2 - e) \ln 2 \quad (2)$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin 2 \quad (3)$$

$$192 \quad (4)$$

$$96\pi \quad (5)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$e - \frac{1}{e} \quad (7)$$

חדוא 2

פרק 24 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים ושימושיהם 200

אינטגרלים משולשים ושימושיהם

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-4 :

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz dy dx dz \quad (1)$$

$$\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dx dz dy \quad (2)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}, \iiint_B xyz^2 dV \quad (3)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq z \leq 1 + x + y\}, \iiint_B 6xy dV \quad (4)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 5-8, על ידי שינוי סדר אינטגרציה :

$$\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dy dx dz \quad (6)$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2} dx dy dz \quad (7)$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dy dz dx \quad (8)$$

בשאלות 9-14 חשבו את נפחי הגופים החסומים על ידי המשטחים:

$$z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0 \quad (9)$$

$$z = 0, z = x^2 + y^2, y = 1, y = x^2 \quad (10)$$

$$(x \geq 0) \quad z = 0, z = x^2 + y, y = 0.5x, y = 2x, y = \frac{2}{x} \quad (11)$$

$$z = 0, \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, 2y^2 = x \quad (12)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = y \quad (13)$$

$$z = x + y, z = 6, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (14)$$

(15) חשבו את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו h ורדיוס הבסיס שלו r . הניחו שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל, כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x, y, z) = kz$ ($k > 0$).

(16) חשבו את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה) $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$, סביב ציר ה- z . בטאו את התשובה באמצעות המסה של התיבה, M .

תשובות סופיות

(1) 1

(2) $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$

(3) $\frac{27}{4}$

(4) $\frac{65}{28}$

(5) $2 \sin 4$

(6) $3e - 6$

(7) 4

(8) $\frac{\sin^2 4}{2}$

(9) $\frac{5}{6}$

(10) $\frac{88}{100}$

(11) $\frac{17}{6}$

(12) $16\frac{1}{5}$

(13) $\frac{8}{3}$

(14) 36

(15) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{2h}{3}\right), M = \frac{1}{2}\pi k h^2 r^2$

(16) $\frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$

חדוא 2

פרק 25 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות.....203

אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

בשאלות 1-4 חשבו את האינטגרלים המשולשים:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2 dz dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx \quad (4)$$

(5) גוף כלוא בגליל $x^2 + y^2 = 9$, בין המישור xy מלמטה, לבין מחצית פני הכדור $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ מלמעלה. חשבו את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

(6) חשבו את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ מלמעלה, ועל ידי החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מלמטה.

(7) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ומלמטה על ידי החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, על ידי מעבר לקואורדינטות גליליות.

(8) מצאו את הנפח של התחום מעל המישור xy , החסום על ידי הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$ והגליל $x^2 + y^2 = a^2$.

(9) חשבו את הנפח הכלוא בין $z = x^2 + y^2$ ובין $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

10 חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z = 2$ ומלמטה על ידי $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. פתרו בשלוש דרכים:

- א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
- ג. על ידי שימוש בנוסחת נפח חרוט.

11 חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z = 1$ ומלמטה על ידי $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$. פתרו בשתי דרכים:

- א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

12 חשבו את הנפח המוגבל בין כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו 1 לבין כדור שמרכזו בנקודה $(0, 0, 1)$ ורדיוסו 1. א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות. ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

13 הציגו את נפח הגוף החסום בתוך הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ומחוץ לגליל $x^2 + y^2 = 1$. בשלוש דרכים:

- א. על ידי שימוש בקואורדינטות קרטזיות.
- ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- ג. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

14 חשבו את נפח הגוף בתומן הראשון המוגבל בין כדור שרדיוסו 1 לבין כדור שרדיוסו 2, בשלוש דרכים:

- א. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
- ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- ג. על ידי שימוש בנוסחה ידועה לחישוב נפח כדור.

15 ללא חישוב אינטגרלים חשב את האינטגרלים הבאים:

$$V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=r}^{2-r} r dz dr d\theta \quad \text{א.}$$

$$V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\frac{2}{\cos\phi + \sin\phi}} r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta \quad \text{ב.}$$

16) ללא חישוב אינטגרלים חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{0.5} \int_{z=r}^{0.5+\sqrt{0.25-r^2}} r dz dr d\theta \quad \text{א.}$$

$$V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\cos \phi} r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות

$$4 \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{24\pi - 32}{9} \quad (3)$$

$$\frac{32\pi}{5} \quad (4)$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1107 / 488), V = \frac{122}{3} \pi \quad (5)$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1.5 / (2 - \sqrt{2})), V = \frac{64}{3} \pi (2 - \sqrt{2}) \quad (6)$$

$$\frac{64\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) \quad (7)$$

$$\frac{\pi}{2} a^4 \quad (8)$$

$$\frac{5}{6} \pi \quad (9)$$

$$\frac{8\pi}{3} \quad (10)$$

$$\frac{5}{3} \pi \quad (11)$$

$$\frac{5}{12} \pi \quad (12)$$

$$V = \int_{x=-2}^2 \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 dz dy dx - \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 dz dy dx \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$V = \int_{\phi=\pi/6}^{5\pi/6} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1/\sin\phi}^2 r^2 \sin\phi dr d\theta d\phi \quad \text{ג.} \quad V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1}^2 \int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} 1 r dz dr d\theta$$

$$\frac{7}{6} \pi \quad (14)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (15)$$

$$\frac{\pi}{8} \quad (16)$$

חדוא 2

פרק 26 - החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים 207

החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

שאלות

(1) חשבו את $\iiint_G (z-y)^2 xy dV$, כאשר G הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים

$$. xy=4, \quad xy=2, \quad z=y+1, \quad z=y, \quad x=3, \quad x=1$$

(2) חשבו את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(3) חשבו את $\iiint_G x^2 dV$, כאשר G הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(4) חשבו את נפח התחום המוגבל על ידי המשטחים:

$$. y=4z^2, \quad y=z^2, \quad y=4x-12, \quad y=4x, \quad y=2z, \quad y=z$$

(5) חשבו את $\iiint_G \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2} dV$, כאשר G הוא כדור

שמרכזו בנקודה $(1, 2, 4)$ ורדיוסו 1.

תשובות סופיות

$$2 \ln 3 \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \pi abc \quad (2)$$

$$\frac{4}{15} \pi a^3 bc \quad (3)$$

$$\frac{105}{32} \quad (4)$$

$$\pi \quad (5)$$

חדוא 2

פרק 27 - אינטגרלים קוויים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים קוויים ושימושיהם 208
2. נספח - הצגה פרמטרית של עקומים חשובים 212

אינטגרלים קוויים ושימושיהם

* מומלץ בחום לעיין בנספח 'הצגה פרמטרית של עקומים חשובים'.

שאלות

אינטגרל קווי מסוג I

בשאלות 1-4 חשבו את האינטגרל $\int_C f(x, y) ds$, כאשר:

$$C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi; \quad f(x, y) = 1 - x^2 \quad (1)$$

$$C: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq \pi; \quad f(x, y) = x \quad (2)$$

$$C: \text{קטע של ישר המחבר את } O(0,0) \text{ עם } A(1,2); \quad f(x, y) = x + y \quad (3)$$

$$C: \text{היקפו של } \triangle OAB \text{ של } O(0,0), A(0,1), B(1,0); \quad f(x, y) = x + y^2 \quad (4)$$

בשאלות 5-6 חשבו את האינטגרל $\int_C f(x, y, z) ds$, כאשר:

$$C: x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq \pi; \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5)$$

$$C: x = t, y = \frac{1}{\sqrt{2}} t^2, z = \frac{1}{3} t^3, 0 \leq t \leq 3; \quad f(x, y, z) = x^3 + 3z \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{חשבו את אורך העקום } x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

$$(8) \quad \text{סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי } x = \cos t, y = \sin t, z = 2t \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

חשבו את מסת הסליל, אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x, y, z) = kz$ ($k > 0$).

אינטגרל קווי מסוג II

בשאלות 9-10 חשבו :

$$C: x = \cos t, y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy \quad (9)$$

$$C: x = t, y = t^2 \quad 0 \leq t \leq 1; \int_C (2x + y) dx + (x^2 - y) dy \quad (10)$$

$$(11) \text{ חשבו } \int_C y dx + x^2 dy, \text{ כאשר } C \text{ המסלול מנקודה } (0,0) \text{ לנקודה } (2,4),$$

ו- C נתון ע"י המשוואה :

$$y = 2x \quad \text{א.}$$

$$y = x^2 \quad \text{ב.}$$

$$(12) \text{ חשבו } \int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y) dx + (y-x) dy, \text{ אם העקום נתון על ידי:}$$

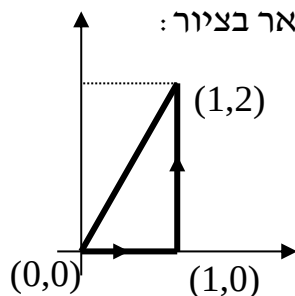
$$\text{א. הפרבולה } y^2 = x.$$

$$\text{ב. קו ישר.}$$

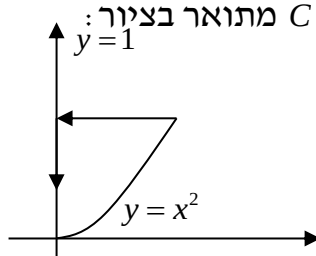
$$\text{ג. הקווים הישרים מ-}(1,1) \text{ ל-}(1,2) \text{ ומשם ל-}(4,2).$$

$$\text{ד. העקום } x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1.$$

$$(13) \text{ חשבו } \int_C x^2 y dx + x dy, \text{ כאשר המסלול } C \text{ מתואר בציור:}$$



$$(14) \text{ חשבו } \int_C (x - y^2) dx + dy, \text{ כאשר המסלול } C \text{ מתואר בציור:}$$



$$(15) \text{ אם } \mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$$

חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, מ- $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$, לאורך המסלולים:

$$\text{א. } x=t, y=t^2, z=t^3$$

ב. הקווים הישרים מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,0,1)$, משם ל- $(0,1,1)$ ומשם ל- $(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו- $(1,1,1)$.

בשאלות 16-17 חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, כאשר:

$$(16) \mathbf{F}(x, y) = (x^2 y^3, -y\sqrt{x}), \quad \mathbf{r}(t) = (t^2, -t^3), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(17) \mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz), \quad \mathbf{r}(t) = (t^3, -t^2, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(18) \text{ נתון שדה הכוח } \mathbf{F}(x, y) = x^3 y \mathbf{i} + (x - y) \mathbf{j}$$

א. חשבו את העבודה שמבצע השדה על חלקיק שנע על הפרבולה $y = x^2$

מ- $(-2, 4)$ עד $(1, 1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה אילו החלקיק היה נע מ- $(1, 1)$ עד $(-2, 4)$?

$$(19) \text{ חשבו את העבודה שמבצע שדה הכוח } \mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$$

על חלקיק הנע לאורך העיקול $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq 1$)

הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f, g, h) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C f dx + g dy + h dz$$

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (A_1, A_2, A_3) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

תשובות סופיות

(1) π

(2) $\frac{16}{3}$

(3) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

(4) $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$

(5) $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$

(6) $\frac{567}{2}$

(7) 6

(8) $\sqrt{5}k\pi^2$

(9) $\frac{1}{3}$

(10) $\frac{4}{3}$

(11) א. $\frac{28}{3}$ ב. $\frac{32}{3}$

(12) א. $\frac{34}{3}$ ב. 11 ג. 14 ד. $\frac{32}{3}$

(13) $\frac{1}{2}$

(14) $\frac{4}{5}$

(15) א. 2 ב. -3 ג. $\frac{6}{5}$

(16) $-\frac{59}{105}$

(17) $\frac{6}{5} - \sin 1 - \cos 1$

(18) א. 3 ב. -3

(19) 1

הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

דוגמה	הצגה פרמטרית	עקום
$y = x^2 \ (1 \leq x \leq 2)$ $\Downarrow$ $x = t, y = t^2 \ (1 \leq t \leq 2)$	$x = t, y = f(t) \ (a \leq t \leq b)$	$y = f(x) \ (a \leq x \leq b)$
$x = y^2 \ (1 \leq y \leq 2)$ $\Downarrow$ $y = t, x = t^2 \ (1 \leq t \leq 2)$	$y = t, x = f(t) \ (a \leq t \leq b)$	$x = f(y) \ (a \leq y \leq b)$
$x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = r \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$x^2 + y^2 = r^2$ מעגל
$x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = -2 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = -r \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ עם כיוון השעון	$x^2 + y^2 = r^2$ מעגל
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = 5 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = b \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ אליפסה
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = -5 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = -b \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ עם כיוון השעון	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ אליפסה
ישר פרמטרי מהנק' $(1, 2)$ לנק' $(3, 4)$ $x = 1 + 2t$ $y = 2 + 2t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במישור מהנק' (x_0, y_0) לנק' (x_1, y_1)
ישר פרמטרי מ- $(1, 2, 3)$ ל- $(4, 7, 9)$ $x = 1 + 3t$ $y = 2 + 5t$ $z = 3 + 6t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $z = z_0 + t(z_1 - z_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במרחב מהנק' (x_0, y_0, z_0) לנק' (x_1, y_1, z_1)

חדוא 2

פרק 28 - שדות משמרים - אי תלות במסלול

תוכן העניינים

1. שדות משמרים - אי תלות במסלול.....213

שדות משמרים – אי-תלות במסלול

שאלות

בשאלות 1-6 קבעו האם F הוא שדה משמר; אם כן, מצאו פונקציה ϕ , כך ש- $\nabla\phi = F$.

$$F(x, y) = (6x + 5y, 5x + 4y) \quad (1)$$

$$F(x, y) = xe^y \mathbf{i} + ye^x \mathbf{j} \quad (2)$$

$$F(x, y) = (2x \cos y - y \cos x, -x^2 \sin y - \sin x) \quad (3)$$

$$F(x, y, z) = z^2 \mathbf{i} + e^{-y} \mathbf{j} + 2xz \mathbf{k} \quad (4)$$

$$F(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (xy + 3z^2) \mathbf{k} \quad (5)$$

$$F(x, y, z) = (z, 2yz, y^2) \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{נתון האינטגרל} \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy$$

א. הוכיחו שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1, 2)$ ו- $(3, 4)$.

ב. חשבו את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

$$(8) \quad \text{חשבו את האינטגרל} \int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3 dx + (1 + 3x^2y^2) dy$$

$$(9) \quad \text{חשבו את האינטגרל} \int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy$$

(10) יהי $F(x, y) = e^y \mathbf{i} + xe^y \mathbf{j}$. מצאו את העבודה שמבצע השדה על חלקיק הנע על

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{מ-} (1, 0) \quad \text{ל-} (-1, 0).$$

11) חשבו את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)} (2xz^3 + 6y)dx + (6x - 2yz)dy + (3x^2z^2 - y^2)dz$ תנו מובן פיסיקאלי לתוצאה.

12) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F} = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{j}$, ונתונים 3 מסלולים:

$$L_1: x^2 + y^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

$$L_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{בכיוון השלילי (עם כיוון השעון).}$$

$$L_3: (x-10)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

חשבו:

$$\oint_{L_3} \mathbf{F} dr \quad \text{ג.}$$

$$\oint_{L_2} \mathbf{F} dr \quad \text{ב.}$$

$$\oint_{L_1} \mathbf{F} dr \quad \text{א.}$$

13) ענו על הסעיפים הבאים:

א. שרטטו את השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ ברביע הראשון.

ב. בתחום $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ נסמן $f = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $g = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

1. הוכיחו כי $f_y = g_x$ בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכיחו שהשדה הנתון (מסעיף א) אינו שדה משמר בתחום D (מסעיף ב).

ד. הוכיחו שהשדה הנתון משמר בחצי המישור הימני

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, ומצאו את פונקציית הפוטנציאל, במקרה זה.

ה. עתה נתון השדה בתחום $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$,

חשבו את $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, כאשר C עקומה סגורה חלקה סביב הנקודה $(0, 0)$.

$$(14) \text{ נתון השדה הווקטורי } F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\text{בתחום } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$$

א. שרטטו את השדה הווקטורי ברביע הראשון.

$$\text{ב. נסמן } f = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad g = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

1. הוכיחו כי $f_y = g_x$ בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכיחו שהשדה הנתון הוא שדה משמר.

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\hat{x} + g(x, y, z)\hat{y} + h(x, y, z)\hat{z}$$

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

תשובות סופיות

$$\phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2 \quad (1)$$

(2) השדה אינו משמר.

$$\phi(x, y) = x^2 \cos y - y \sin x \quad (3)$$

$$\phi(x, y, z) = xz^2 - e^{-y} \quad (4)$$

$$\phi(x, y, z) = xyz + z^3 \quad (5)$$

(6) השדה אינו משמר.

(7) א. שאלת הוכחה. ב. 236

(8) -58

(9) 5

(10) -2

(11) $= 15$ עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- $(1, -1, 1)$ ל- $(2, 1, -1)$, לאורך C .

(12) א. 2π ב. -2π ג. 0

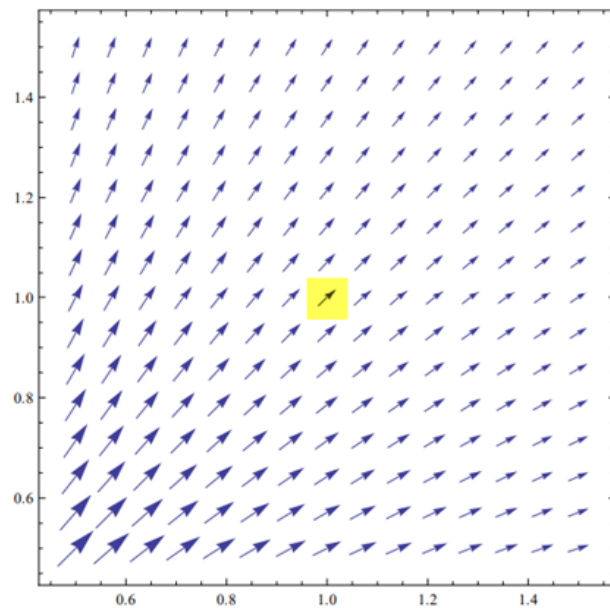
(13) א. ראו בעמוד הבא. ב. i. שאלת הוכחה. ii. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.

ג. שאלת הוכחה. ד. שאלת הוכחה; $\phi = \arctan \frac{y}{x} + k$; ה. 2π

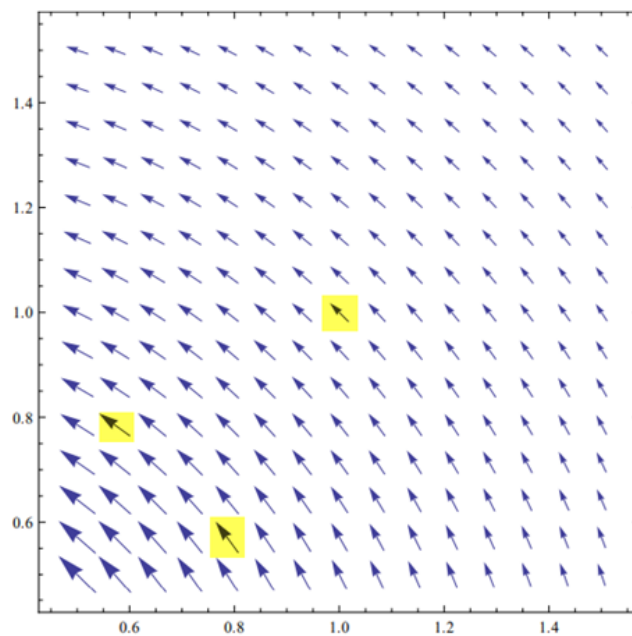
(14) א. ראו בעמוד הבא. ב. 1. שאלת הוכחה. 2. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר. ג. שאלת הוכחה.

שרטוטים

שאלה 13 סעיף א:



שאלה 14 סעיף א:



חדוא 2

פרק 29 - משפט גרין

תוכן העניינים

1. משפט גרין.....218

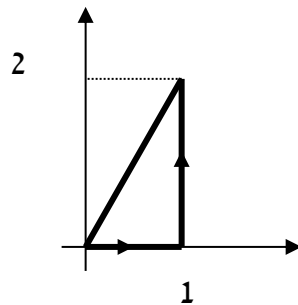
משפט גרין

שאלות

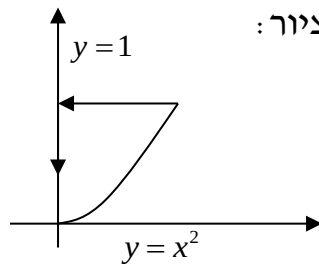
בשאלות 1-3 אשרו את משפט גרין.

כלומר, חשבו את האינטגרל $\oint_C f dx + g dy$ ואת האינטגרל $\iint_R (g_x - f_y) dA$,

והראו שהם שווים זה לזה.



(1) $\oint_C x^2 y dx + x dy$; המסלול C מתואר בציור:



(2) $\oint_C (x - y^2) dx + dy$; המסלול C מתואר בציור:

(3) $\oint_C (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$, הוא ריבוע שקדקודיו:

$(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$ בכיוון החיובי.

(4) חשבו את העבודה שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון, ומשלים הקפה אחת.

(5) חשבו את האינטגרל $\int_C \left(e^y - \tan \frac{x}{2} \right) dx + (xe^y + y \cos y^2) dy$, כאשר C הוא

האיחוד של העקומים $y = 8 - x^2$, $y = x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

(6) חשבו את האינטגרל $\int_C -2e^{2x-y} \cos y dx + (e^{2x-y} (\sin y + \cos y) + 2xy) dy$

כאשר C הוא חצי האליפסה $\{x^2 + 4y^2 = 4, y \geq 0\}$ מהנקודה $(2, 0)$ לנקודה $(-2, 0)$.

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט C ,

$$\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

ב. חשבו את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(8) נתון האינטגרל הקווי $\oint_C (x^3 + 3x^2y + 3xy^2y^3) dx + (3x^2y + 3x - \sin y) dy$

כאשר C מסילה פשוטה סגורה נגד כיוון השעון.

מהו הערך המקסימלי של האינטגרל?

עבור איזו מסילה C הוא מתקבל?

(9) הוכיחו שלא קיימת עקומה פשוטה, סגורה וגזירה למקוטעין C ,

$$\oint_C -y^3 dx + x^3 dy = 0$$

(10) חשבו את $\oint_C \frac{4x-y}{4 \cdot (x^2+y^2)} dx + \frac{x-4y}{4 \cdot (x^2+y^2)} dy$, כאשר:

א. C הוא המעגל $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$.

ב. C הוא המעגל $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 144$.

ג. C היא מסילה כלשהי סביב הראשית.

תשובות סופיות

- (1) הערך המשותף הוא 0.5.
- (2) הערך המשותף הוא 0.8.
- (3) הערך המשותף הוא 8.
- (4) 1.5π
- (5) $0.5\sin 64$
- (6) $\frac{8}{3} + e^4 - \frac{1}{e^4}$
- (7) א. הוכחה. ב. πab
- (8) הערך המקסימלי הוא $\frac{6\pi}{4}$, עבור המסילה $C: x^2 + y^2 = 1$.
- (9) הוכחה.
- (10) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{\pi}{2}$

חדוא 2

פרק 30 - אינטגרלים משטחיים

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של משטח (ללא ספר)
2. אינטגרלים משטחיים מסוג 1 221
3. אינטגרלים משטחיים מסוג 2 223

אינטגרלים משטחיים מסוג I

שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את האינטגרל המשטחי:

$$(1) \quad \iint_S x^2 y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = 1 + 2x + 3y,$$

$$\text{מעל המלבן } R = [0, 3] \times [0, 2].$$

$$(2) \quad \iint_S x dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המשטח } y = x^2 + 4z, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

$$(3) \quad \iint_S y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = y + 3, \text{ שכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1.$$

$$(4) \quad \iint_S (x^2 z + y^2 z) dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא חצי הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0.$$

$$(5) \quad \iint_S x y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא חלק החרוט } \mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 3u \mathbf{k}$$

$$\text{המקיים } 1 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$(6) \quad \text{חשבו את שטח הפנים של כדור בעל רדיוס } R.$$

$$(7) \quad \text{היריעה הדקה } S \text{ היא חלק הפרבולואיד } z = x^2 + y^2, \text{ שמתחת למישור } z = 1,$$

$$\text{וצפיפותה } \delta(x, y, z) = \delta_0, \text{ קבועה.}$$

חשבו את מסת היריעה.

תשובות סופיות

(1) $171\sqrt{14}$

(2) $\frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{6}$

(3) $\pi\sqrt{2} / 4$

(4) 16π

(5) $93 / \sqrt{10}$

(6) $4\pi R^2$

(7) $\frac{\pi\delta_0}{6}(5\sqrt{5}-1)$

אינטגרל משטחי מסוג II

שאלות

בשאלות הבאות חשבו את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).

בניסוח אחר: חשבו את השטף של שדה הזרימה $\mathbf{F}$ דרך S .

(1) $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה הנקבעת על ידי המישורים: $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(2) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(3) $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה הנקבעת על ידי המישורים $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$.

(4) $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$, שבו $z \geq 0$.

(5) $\mathbf{F} = 0\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + (-3y - 1)\mathbf{k}$, S הוא חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

תשובות סופיות

(1) $\frac{11}{6}$

(2) $\frac{8\pi}{3}$

(3) 27

(4) 12π

(5) -16π

חדוא 2

פרק 31 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

תוכן העניינים

1. משפט הדיברגנץ 224

משפט הדיברגנץ (גאוס)

שאלות

בשאלות 1-3 אשרו את משפט הדיברגנץ.

כלומר, חשבו את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, ואת האינטגרל $\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV$,

והראו שהם שווים זה לזה ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).
(ראו הערת סימון בעמוד הבא)

(1) $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G ,
הנקבעת ע"י המישורים: $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(2) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G , $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(3) $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G ,
הנקבעת ע"י המישורים: $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$.

(4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2 + y^2 = 9$, בין המישורים $z=0$ ו- $z=2$.
חשבו את השטף של השדה הווקטורי $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ דרך S .
כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

(5) חשבו את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

$\mathbf{F} = (z^2 - x)\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי:
 $x=0, x=3, z=4-y^2, z=0$.

(6) חשבו את $\iint_S xz^2 dydz + (x^2y - z^3) dzdx + (2xy + y^2z) dxdy$,
כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z=0$.

(7) יהי S משטח פתוח $x^2 + z^2 = 16, 0 \leq y \leq 4$ (גליל ללא הבסיסים).
חשבו את השטף דרך S של השדה הווקטורי $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + 5y\mathbf{j} + x^5\mathbf{k}$.
כלומר, חשבו את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

(8) חשבו את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz^2 \right) \mathbf{i} + 2x \arctan y \mathbf{j} - \frac{2xz(1+y) + 1+y^2}{1+y^2} \mathbf{k}$$

S הוא חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$, שבו $z \geq 0$ (המשטח פתוח).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$,

$$\text{מתקיים: } \iiint_G \text{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\iiint_G \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV = \iint_S f dydz + g dzdx + h dx dy$$

תשובות סופיות

$$(1) \text{ הערך המשותף הוא } \frac{11}{6}$$

$$(2) \text{ הערך המשותף הוא } \frac{8}{3}\pi$$

$$(3) \text{ הערך המשותף הוא } 27$$

$$(4) 279\pi$$

$$(5) 16$$

$$(6) \frac{2\pi a^5}{5}$$

$$(7) 0$$

$$(8) -4\pi$$

חדוא 2

פרק 32 - משפט סטוקס

תוכן העניינים

1. משפט סטוקס 226

משפט סטוקס

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו שמשפט סטוקס אכן מתקיים.
כלומר, חשבו את האינטגרל $\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} ds$, ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$,
והראו שהם שווים זה לזה (ראו הערת סימון בעמוד הבא).

$$(1) \quad S: \text{חלק הפרבולואיד } z = 4 - x^2 - y^2, \text{ שבו } z \geq 0; \mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$$

$$(2) \quad S: \text{הוא שפת חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור } xy. \mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + (-3xy)\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$$

$$(3) \quad S: \text{הוא משטח התחום בשמינית הראשונה, החסום על ידי המישורים } 2x + z = 6, y = 2, \text{ ושאינו כלול א. במישור } xy. \text{ ב. במישור } y = 2. \text{ ג. במישור } 2x + z = 6.$$

$$(4) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \oint_C x^2 dx + 4xy^3 dy + y^2 x dz, \text{ כאשר } C \text{ עקומה בצורת מלבן מ-}(0,0,0) \text{ ל-}(0,3,3), \text{ משם ל-}(1,3,3) \text{ ומשם ל-}(1,0,0).$$

$$(5) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \text{ כאשר } \mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}, \text{ ו-} C \text{ היא שפת המשולש, שקדקודיו הם } (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \text{ וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה, מהכיוון החיובי של ציר ה-} z).$$

$$(6) \quad \text{חשבו את } \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS, \text{ כאשר } \mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}; \text{ ו-} S \text{ הוא החלק של הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4, \text{ הכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1, \text{ ומעל למישור } xy.$$

(7) חשבו את $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$, כאשר $\mathbf{F} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$;

ו- S הוא משטח החרוט $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, מעל למישור- xy .

הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{מתקיים:}$$

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{Rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C f dx + g dy + h dz = \iint_S ((h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS$$

תשובות סופיות

(1) הערך המשותף הוא 12π .

(2) הערך המשותף הוא -16π .

(3) הערך המשותף הוא: א. -6 ב. -9 ג. -18

(4) -90

(5) -1

(6) 0

(7) 12π

חדוא 2

פרק 33 - אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

תוכן העניינים

1. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) 228
2. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) 230
3. אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר 231
4. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) 233
5. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) 235

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

$$(1) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^4 - x}{\ln x} dx$$

$$(2) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x} dx \quad (m, n > 0)$$

$$(3) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

$$(4) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) dx$$

$$(5) \quad \text{הוכיחו כי } \int_0^\pi \ln(1 + \alpha \cos x) dx = \pi \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2} \right) \quad \text{עבור } |\alpha| < 1$$

$$(6) \quad \text{חשבו } \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx \quad \text{עבור } \alpha \neq \pm 1$$

$$(7) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(8) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^1 x^p (\ln x)^m dx \quad (p > 0, m \in \mathbb{N})$$

$$(9) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \int_0^\pi \frac{1}{(2 - \cos x)^2} dx$$

תשובות סופיות

$$\ln 2.5 \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{8} \ln 2 \quad (3)$$

$$2\pi \quad (4)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \begin{cases} 0 & |\alpha| < 1 \\ 2\pi \ln |\alpha| & |\alpha| > 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\pi + 2}{8} \quad (7)$$

$$\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{(m+1)}} \quad (8)$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{27}} \quad (9)$$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

(1) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, עבור $b > a > 0$.

(2) חשבו את האינטגרל $\int_0^\pi \ln \frac{b - \cos x}{a - \cos x} dx$, עבור $b, a > 1$.

(3) הוכיחו כי $\int_0^{2\pi} [(b - \sin x)^2 - (a - \sin x)^2] dx = 2\pi(b^2 - a^2)$, לכל a ו- b .

הערה: פתרו בשתי דרכים, גם על ידי אינטגרציה תחת סימן האינטגרל וגם על ידי חישוב ישיר.

(4) בהינתן הנוסחה $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha + \sin x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$, עבור $\alpha > 1$,

הוכיחו כי $\int_0^{2\pi} \ln \left(\frac{5 + 3 \sin x}{5 + 4 \sin x} \right) dx = 2\pi \ln \left(\frac{9}{8} \right)$.

תשובות סופיות

(1) $\ln \left(\frac{b+1}{a+1} \right)$

(2) $\pi \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right)$

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה

אינטגרל לא אמיתי תלוי בפרמטר

הערה חשובה

נושא זה הוא הרקע התיאורטי הנדרש להצדקת הגזירה והאינטגרציה תחת סימן האינטגרל עבור אינטגרלים לא אמיתיים, נושאים שיילמדו בהמשך. בחלק מהמוסדות מסתפקים רק בצד הטכני החישובי ולא נכנסים לנושא זה כלל. בררו עם מתרגלות וואו מרצה הקורס האם נושא זה נדרש או לא. במידה ולא, דלגו היישר לנושאים הבאים. בהצלחה!

שאלות

$$(1) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(kx) dx, \text{ כאשר } k \text{ ממשי.}$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $0 < a \leq \alpha$.

$$(2) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + \alpha)^n} dx, \text{ כאשר } n \text{ טבעי.}$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $\alpha \geq 1$.

$$(3) \text{ הוכיחו שהאינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \text{ מתכנס במידה שווה עבור } \alpha \geq 0.$$

$$(4) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\alpha^2(1+x^2)}{2}}}{1+x^2} dx.$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α .

$$(5) \text{ נתון האינטגרל } \phi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \text{ עבור } \alpha \geq k > 0.$$

א. חשבו את האינטגרל והוכיחו שהאינטגרל תלוי בפרמטר.

ב. הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α המקיים $\alpha \geq k > 0$.

$$(6) \quad \phi(\alpha) = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx \quad \text{נתון האינטגרל}$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל n טבעי ולכל α המקיים $\alpha \geq k > 0$.

$$(7) \quad \text{נתון כי } \phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2} dx, \text{ כאשר } \alpha \geq k > 0.$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה.

$$(8) \quad \text{נתון האינטגרל } \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)/2} dx$$

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל $\alpha \geq k > 0$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה – לפתרונות מלאים כנסו לאתר GooL.co.il

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

(1) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$

(2) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2}$$

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

(4) חשבו את האינטגרל:

א. $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$, כאשר $n \in \mathbb{N}$

ב. $\int_0^{\infty} x^{10} e^{-x^2} dx$

ג. $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$

(5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$, $(\alpha > 0)$

ב. בעזרת סעיף א' חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(אין צורך לנמק מתמטית את החישוב)

תשובות סופיות

(1) $n!$

(2) שאלת הוכחה.

(3) א. $\sqrt{2\pi}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(4) א. אם n אי-זוגי אז 0, ואם n זוגי אז $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot \sqrt{2\pi}$

ב. $\frac{945}{64} \sqrt{\pi}$ ג. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(5) א. $-\arctan \alpha + \frac{\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{2}$

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

(1) חשבו את $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$, עבור $b > a \geq k > 0$.

(2) חשבו את $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$, עבור $b > a \geq k > 0$.

(3) חשבו את $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$.

(4) הוכיחו כי עבור $b > a > 0$ ו- $r \in \mathbb{R}$, מתקיים $\int_0^{\infty} \cos rx \frac{a^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + r^2}{a^2 + r^2}$.

(5) הוכיחו:

א. $(\alpha, r > 0) \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin rx}{x} dx = \arctan \frac{r}{\alpha}$

ב. $(\alpha, r > 0) \quad \int_0^{\infty} \left[e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos rx}{x^2} \right] dx = \arctan \frac{r}{\alpha} - \frac{a}{2} \ln \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right)$

ג. $(\alpha > 0) \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \arctan \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right)$

(6) הוכיחו:

א. $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

ב. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$

8) חשבו את $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

תשובות סופיות

(1) $\ln \frac{b}{a}$

(2) $\frac{\pi}{2}(b-a)$

(3) π

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{\pi}{4}$

(8) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

חדוא 2

פרק 34 - פונקציות הומוגניות-משפט אוילר

תוכן העניינים

237	1. פונקציות הומוגניות.....
240	2. משפט אוילר.....

פונקציות הומוגניות

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאיזה סדר :

$$f(x, y) = x^3 \sqrt{y} + y^3 \sqrt{x} \quad (1)$$

$$h(x, y) = \frac{\ln(e^{5x})}{\sqrt[3]{ex^6 - 7y^6}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \ln(4^x) \cdot g\left[\frac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right] \quad (3)$$

(4) נתון כי $z(x, y)$ פונקציה הומוגנית מסדר 3.

בדקו האם הפונקציה $f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} + \frac{1}{z(x, y)} - 4$ הומוגנית.
 במידה והפונקציה לא הומוגנית, השמיטו ממנה חלק,
 כך שתתקבל פונקציה הומוגנית.
 מהו סדר ההומוגניות של הפונקציה במקרה זה?

(5) מצאו עבור איזה ערך של הפרמטר α , כל אחת מהפונקציות הבאות הומוגניות.
 כמו כן, מצאו את סדר ההומוגניות עבור ה- α שנמצאה.

$$f(x, y) = \frac{x^4 y + xy^\alpha}{4x + 10y} \quad \text{א.}$$

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}} (\ln \alpha x - \ln y) \quad \text{ב.}$$

(6) בתרגיל זה נדגים את התכונה הבאה של פונקציות הומוגניות :
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n , אז אם נחלק אותה ב- x^n ,

$$\text{נקבל פונקציה של } \frac{y}{x}.$$

א. הדגימו את הטענה על הפונקציות הבאות :

$$1. f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$$

$$2. f(x, y) = \sqrt{x+y}$$

ב. הוכיחו את הטענה לעיל.

הערה

ניסוח פורמלי של הטענה לעיל הוא :

אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n , אז קיימת פונקציה $g(t)$, כך ש- $t = \frac{y}{x}$,

$$\text{המקיימת } \frac{f(x, y)}{x^n} = g(t).$$

(7) תהיינה f ו- g פונקציות ב- n משתנים, והומוגניות מסדר r_1 ו- r_2 , בהתאמה. קבעו, לכל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא הומוגנית ומאיזה דרגה :

$$\text{א. } f \cdot g \quad \text{ב. } \frac{f}{g} \quad \text{ג. } \frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}} \quad \text{ד. } f + g$$

(8) נתון כי f פונקציה הומוגנית מסדר 4.

$$\text{ידוע כי } f(1, 2) = 4, \quad f_x(1, 2) = 10$$

$$\text{חשבו את } f(2, 4), f(0.5, 1), f_x(2, 4), f_x(1.5, 3).$$

(9) נתונה פונקציה $f(x, y) = x^4 + y^2 z(x, y)$.

$$\text{ידוע כי } z \text{ פונקציה הומוגנית מסדר 2 וכי } f(4, 10) = 1.$$

$$\text{א. חשבו את } f(2, 5).$$

$$\text{ב. ידוע כי } f_x(1, 1) = 4.$$

$$\text{חשבו את } f_x(a, a), \text{ לכל קבוע } a.$$

תשובות סופיות

- (1) הומוגנית מסדר 3.5.
- (2) הומוגנית מסדר -1.
- (3) הומוגנית מסדר 1.
- (4) הפונקציה לא הומוגנית. על ידי השמטת חלקים מהפונקציה אפשר לקבל:
- $$f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{1}{z(x, y)} \quad \text{הומוגנית מסדר } -3.$$
- $$f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} \quad \text{הומוגנית מסדר } -2.$$
- $$f(x, y) = -4 \quad \text{הומוגנית מסדר } 0.$$
- (5) א. עבור $\alpha = 4$ הפונקציה הומוגנית מסדר 4. ב. הומוגנית מסדר 0 לכל $\alpha > 0$.
- (6) א. 1. $g(t) = 1 - t + 2t^2$ 2. $g(t) = \sqrt{1+t}$ ב. הוכחה.
- (7) א. הומוגנית מדרגה $r_1 + r_2$. ב. הומוגנית מדרגה $r_1 - r_2$.
- ג. הומוגנית מדרגה $2r_1 - \frac{r_2}{n}$.
- ד. הומוגנית מדרגה r_1 רק אם $r_1 = r_2$. אחרת לא הומוגנית.
- (8) $f_x(2, 4) = 80$, $f_x(1.5, 3) = 33.75$, $f(2, 4) = 64$, $f(0.5, 1) = \frac{1}{4}$
- (9) א. $f(2, 5) = \frac{1}{16}$ ב. $f_x(a, a) = 4a^3$

משפט אוילר

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$.

- א. הוכיחו שהפונקציה הומוגנית ומצאו את דרגתה.
ב. הראו שמשפט אוילר מתקיים.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נניח ש- $f = f(x, y)$ הומוגנית מסדר 0.

הוכיחו כי $\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y}{x}$.

ב. נתון כי $f(x, y) = \frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{(x-y)(\ln x - \ln y)}$.

הוכיחו כי $x \cdot f_x = -y \cdot f_y$.

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי פונקציית התועלת $u(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית.

הניחו כי m קבוע חיובי.

ב. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a, a) = u_y(1, 1)$.

ג. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2, 2) + u_y(1, 1) = 1$.

(4) תהי f פונקציה הומוגנית מסדר 2,

ונגדיר $h(x, y) = x^2 - y^2 + f\left(\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x}\right)$.

א. הוכיחו כי h הומוגנית מסדר 2.

ב. נתון: $f(8, 1) = 16$, $h'_x(6, 3) = 9$.

מצאו את $h(2, 1)$ ואת $h'_y(2, 1)$.

(5) g ו- h הינן פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאמה. נגדיר:

$$f(x, y) = (x + y)h(x, y) + \frac{\sqrt{g(x, y)}}{x^2 + y^2}$$

א. הוכיחו כי f הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון: $h(4, 32) = 16$, $f'_y(1, 8) = 3$, $f'_x(2, 16) = 12$.

מצאו את $f(1, 8)$ ואת $g(1, 8)$.

(6) f הומוגנית מסדר 4, g הומוגנית מסדר 2 ו- h הומוגנית מסדר 0.

נגדיר פונקציה $p(x, y) = f(x, y) + g(x, y) - h(x, y)$.

נתון: $p(1, 2) = \frac{7}{2}$, $h\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{5}{2}$, $f'_y(-1, -2) = -4$, $f'_x(2, 4) = 64$.

חשבו את $g\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

(7) הפונקציה $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 3. הנתונים בשרטוט.

א. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ב. מצאו את ערך הסכום $f_x(4, 8) + 2f_y(4, 8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x, y)$,

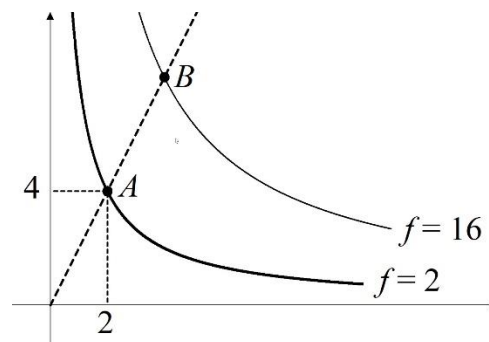
$$u(x, y) = (f(x, y))^2$$

1. לפי כללי הגזירה, מתקיים $u_x(x, y) = 2 \cdot f(x, y) \cdot f'_x(x, y)$.

הסבירו זאת בקצרה.

2. הוכיחו כי $x \cdot u_x(x, y) + y \cdot u_y(x, y) = 6(f(x, y))^2$.

היעזרו בסעיף הקודם ובנתונים על f .



(8) תהי $f(x, y)$ פונקציה הומוגנית מסדר m ,

$$f(2, 1) = 27 \text{ ו- } f(6, 3) = 243.$$

א. מצאו את סדר ההומוגניות, m .

ב. בנקודה $(2, 1)$ עוברת עש"ע של f .

העבירו משיק לעש"ע בנקודה הנ"ל.

$$2x + 3y = 7.$$

מצאו את $f_x(2, 1)$, $f_y(2, 1)$, $f_x(1, 0.5)$.

(9) תהי $g(t)$ פונקציה של משתנה אחד.

$$g(4) = 5, g(1) = 3, g'(8) = 2 \text{ כי ידוע,}$$

המשתנה t תלוי במשתנים החיוביים (x, y) , כך: $t = \frac{4y}{x}$.

נגדיר תועלת u כפונקציה של המשתנים (x, y) , באופן הבא:

$$u(x, y) = g(t) = g\left(\frac{4y}{x}\right).$$

א. באיור שלהלן קרן עם שיפוע 1.

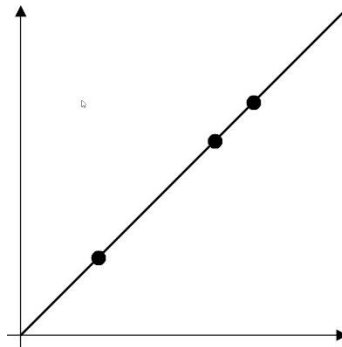
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?

ב. הוכיחו כי הקרן $4y - x = 0$ היא עקומת אדישות של התועלת.

ציירו את הקרן הזאת ורשמו באיור מה הערך של התועלת.

ג. הוכיחו כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכיחו כי $u_x(1, 2) = -16$.



(10) נניח ש- $f = f(x, y)$ הומוגנית מסדר 1.

$$\text{הוכיחו כי } x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0.$$

(11) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

א. אם $f_x(x, y)$ הומוגנית מסדר 4, אז $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 5.

ב. אם פונקציה $f(x, y)$ מקיימת $f(2, 4) = 2^3 f(1, 2)$,

אז הפונקציה הומוגנית מסדר 3.

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) א. שאלת הוכחה. ב. $h(2, 1) = 4$ $h'_y(2, 1) = 8$

(5) א. שאלת הוכחה. ב. $g(1, 8) = 0$, $f(1, 8) = 9$

(6) $-\frac{3}{4}$

(7) א. $B(4, 8)$ ב. 12 ג. שאלת הוכחה והסבר.

(8) א. 2 ב. $f_x(1, 0.5) = \frac{54}{7}$, $f_y(2, 1) = \frac{3\left(\frac{108}{7}\right)}{2}$, $f_x(2, 1) = \frac{108}{7}$

(9) א. 5 ב-ד. שאלות הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.

חדוא 2

פרק 35 - גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר

תוכן העניינים

244	1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית
248	2. משוואת הישר
253	3. מצבים הדדיים בין ישרים
255	4. מציאת משוואות ישר
256	5. שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר
(ללא ספר)	6. נושאים מתקדמים עם משוואת הישר
262	7. חלוקת קטע ביחס נתון
263	8. מרחק נקודה מישר
265	9. מיקום נקודה ביחס לישר
267	10. מרחק בין ישרים מקבילים

מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ יחושב לפי: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הוא: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

שאלות:

שאלות העוסקות באמצע קטע:

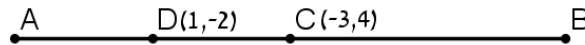
- (1) מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:
- א. $A(1, 4), B(5, -8)$ ב. $A(-3, 0), B(3, -2)$
- ג. $A(4, 5), B(-4, -5)$ ד. $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), B\left(7\frac{1}{2}, -2\right)$
- ה. $A(6, -1), B(-3, -1)$ ו. $A(4, 7), B(4, -12)$

- (2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
- מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:
- א. $A(4, -2), M(2, 1)$ ב. $A(-6, -8), M(0, 0)$
- ג. $A(13, -11), M(4, -7)$ ד. $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right), M\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

- (3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
- ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם $B(2, -4), C(6, 1)$.
- מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.
- (4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
- ידוע כי: $A(-2, 1), B(6, 5)$. מצא את שיעורי הנקודה D.



- (5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC. ידוע כי: $D(1, -2)$, $C(-3, 4)$. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



- (6) הנקודות $A(2, -7)$, $B(-10, 4)$ ו- $C(6, 11)$ הן שלושה קדקודים של מקבילית ABCD. מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי, D.

שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:

- (7) מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:
- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| א. $A(4, 7)$, $B(-3, 7)$ | ב. $A(6, 2)$, $B(1, 2)$ |
| ג. $A(-3, 10)$, $B(0, 6)$ | ד. $A(6, -9)$, $B(1, 3)$ |
| ה. $A(4, 7)$, $B(13, -1)$ | ו. $A(6, 6)$, $B(-9, -9)$ |
- (8) חשב את היקף המשולש ABC שקדקודיו הם: $A(3, -2)$, $B(4, 9)$, $C(0, 14)$.
- (9) נתונות נקודות $A(14, 4)$, $B(6, y)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך. מצא את y.
- (10) נתונות נקודות $A(x, -12)$, $B(15, -2)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך. מצא את x.

- (11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה-y שלה גדול פי 3 משיעור ה-x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4, 1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

- (12) במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$. יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם $(0, 4)$ ושיעורי ה-y של הקדקודים B ו-C הוא 2. מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

- (13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC} = \sqrt{50}$. מצא את היקף המלבן. ידוע כי: $A(-3, -2)$, $B(-4, 1)$.

שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:

14) מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| א. $A(5,2)$, $B(4,1)$ | ב. $A(3,-2)$, $B(-3,1)$ |
| ג. $A(7,8)$, $B(6,15)$ | ד. $A(0,5)$, $B(7,0)$ |
| ה. $A(6,9)$, $B(6,-7)$ | ו. $A(4,-1)$, $B(18,-1)$ |

15) מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו

הם: $A(6,5)$, $B(2,13)$, $C(4,-7)$ מונחים עליהם.

תשובות סופיות:

- (1) א. $(3, -2)$ ב. $(0, -1)$ ג. $(0, 0)$
- ד. $\left(4, -\frac{5}{8}\right)$ ה. $(1.5, -1)$ ו. $(4, -2.5)$
- (2) א. $B(0, 4)$ ב. $B(6, 8)$ ג. $B(-5, -3)$ ד. $B\left(1, \frac{2}{3}\right)$
- (3) $D(4, -1.5)$
- (4) $D(0, 2)$
- (5) $A(5, -8)$, $B(-11, 16)$
- (6) $D(18, 0)$
- (7) א. $d_{AB} = 7$ ב. $d_{AB} = 5$ ג. $d_{AB} = 5$ ד. $d_{AB} = 13$
- ה. $d_{AB} = \sqrt{145}$ ו. $d_{AB} = 15\sqrt{2}$
- (8) $P_{ABC} \approx 33.862$ יחידות אורך
- (9) $y = -2$ או $y = 10$
- (10) $x = 39$ או $x = -9$
- (11) $B(-1, -3)$
- (12) $B(3, -2)$, $C(-3, -2)$
- (13) $P_{ABCD} = 6\sqrt{10} \approx 18.97$ יחידות אורך
- (14) א. $m_{AB} = 1$ ב. $m_{AB} = -\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB} = -7$ ד. $m_{AB} = -\frac{5}{7}$
- ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB} = 0$
- (15) $m_{AB} = -2$, $m_{BC} = -10$, $m_{AC} = 6$

משוואת הישר:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הוא: $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x : $m = \tan \alpha$.

משוואת הישר:

- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y = mx + n$.
- כאשר: m הוא שיפוע הישר ו- n הוא ערך ה- y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y .
- נוסחה למציאת משוואת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

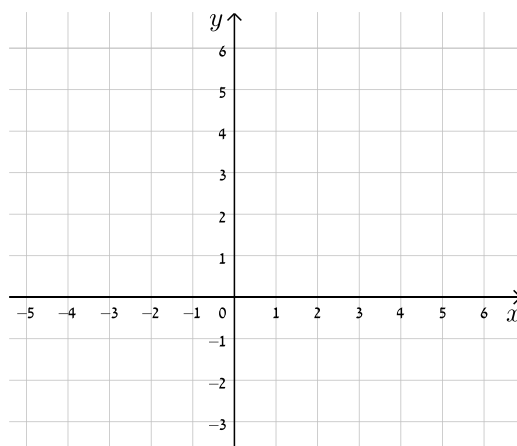
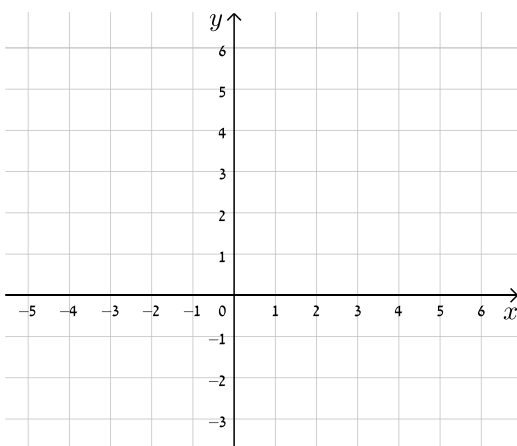
שאלות:

16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

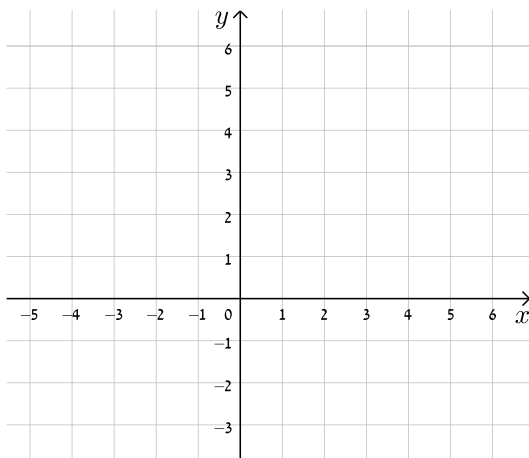
ב. $y = -x + 5$

ב.

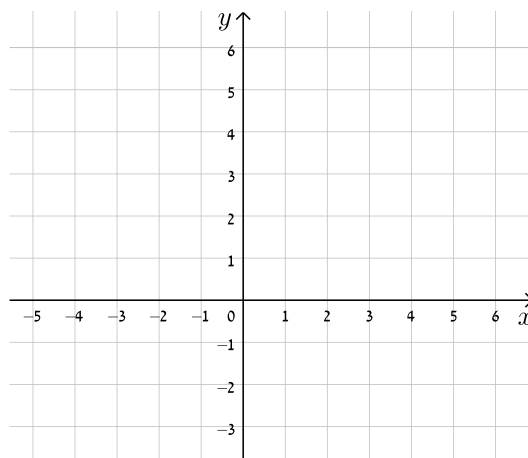
א. $y = x + 4$



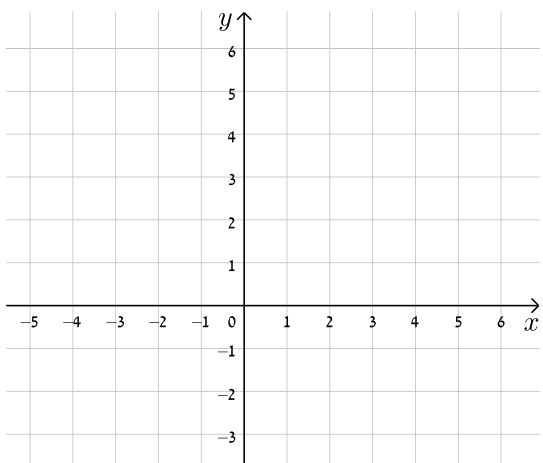
$$y = -3x + 5 \quad \text{ד.}$$



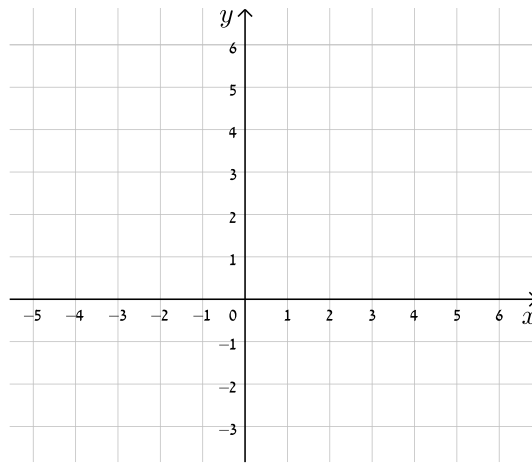
$$y = 2x - 3 \quad \text{ג.}$$



$$y = 8 - 4x \quad \text{ו.}$$

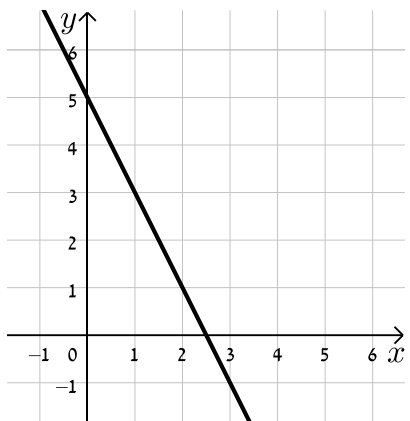


$$y = 3x - 1 \quad \text{ה.}$$

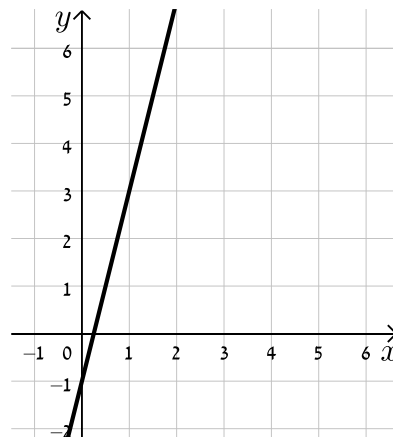


17) כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

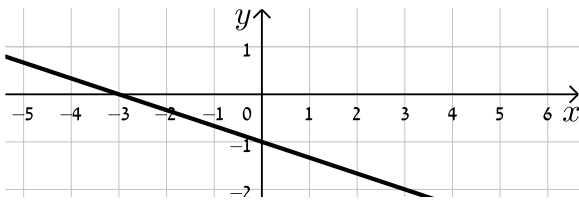
ב.



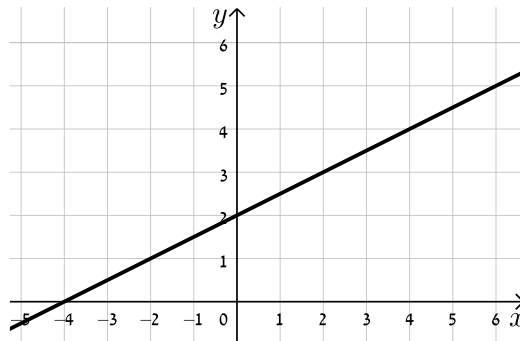
א.



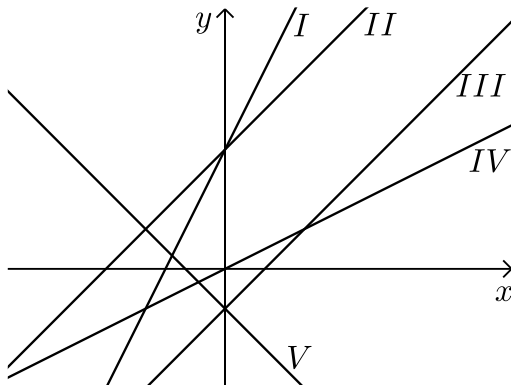
ד.



ג.



18) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט :



א. $y = x + 3$

ב. $y = -x - 1$

ג. $y = 2x + 3$

ד. $y = x - 1$

ה. $y = \frac{1}{2}x$

19) נתונה משוואה הישר הבאה : $y = 2x + 3$. קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות

עליו : $A(-1,1)$, $B(3,3)$, $C(0,4)$, $D(6,15)$.

20) נתונה משוואת הישר הבאה : $y = mx - 2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4,2)$ נמצאת על

הישר. מצא את m וקבע האם גם הנקודה $B(7,-2)$ נמצאת עליו.

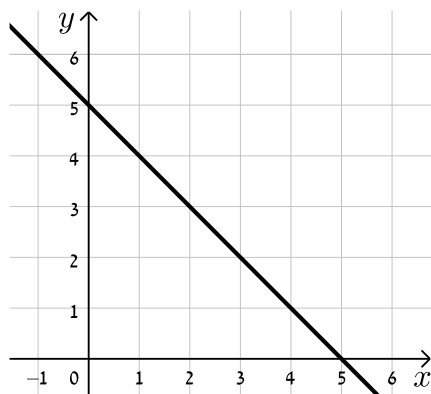
21) הנקודות $A(5,-3)$, $B(4,1)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא : $y = mx + n$.

מצא את m ואת n .

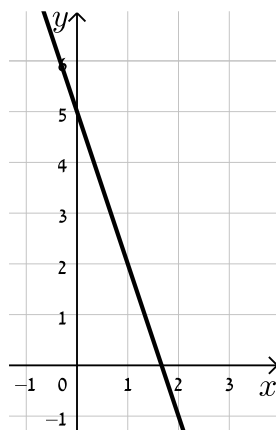
תשובות סופיות:

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

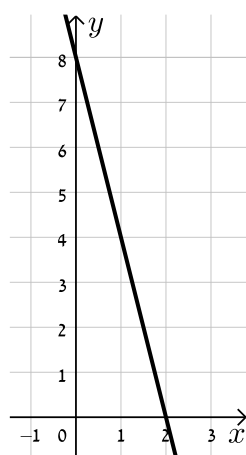
ב.



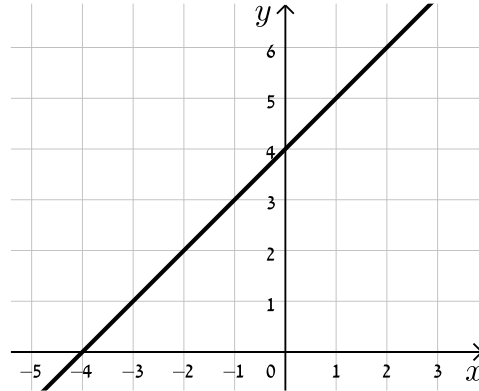
ד.



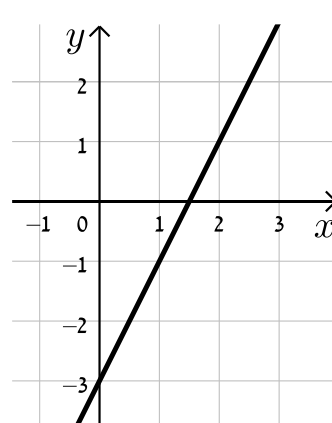
ו.



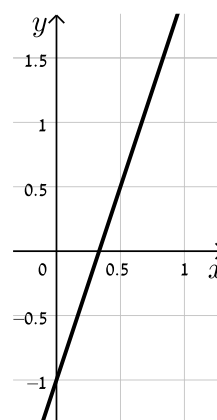
א.



ג.



ה.



- (17) א. $y = 4x - 1$ ב. $y = -2x + 5$ ג. $y = \frac{1}{2}x + 2$ ד. $y = -\frac{1}{3}x - 1$
- (18) א. II. ב. V. ג. I. ד. III. ה. IV.
- (19) נמצאות : A, D. לא נמצאות : B, C.
- (20) $m = \frac{9}{8}$, B לא נמצאת.
- (21) $m = -4$, $n = 17$.

מצבים הדדיים בין ישרים:

סיכום כללי:

מצב הדדי בין שני ישרים:

- ישרים מקבילים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 \neq n_2$.
- ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.
- ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$.

שאלות:

22) מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

א.	$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$	ב.	$\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$	ג.	$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$
----	---	----	--	----	---

23) קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

א.	$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$	ב.	$\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}$
ג.	$\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}$	ד.	$\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}$

24) קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

א.	$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$	ב.	$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$
ג.	$\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$	ד.	$\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}$

(25) משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y = 6x - 2$.

- א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?
 ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

(26) במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $A(5, -1)$, $B(3, 7)$, $C(-5, 5)$.
 הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

תשובות סופיות:

- (22)** א. $(-1, 1)$ ב. $(-6, -18)$ ג. $(10, 16)$.
(23) א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.
(24) מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.
(25) א. $m_{AB} = m_{CD} = 6$, $m_{BC} = m_{AD} = -\frac{1}{6}$.
 ב. הכל הפוך: $m_{AB} = m_{CD} = -\frac{1}{6}$, $m_{BC} = m_{AD} = 6$.
(26) שאלת הוכחה.

מציאת משוואות ישר:

שאלות:

(27) מצא את משוואות הישרים הבאים :

- א. ישר העובר דרך הנקודה $A(1, 3)$ ושיפועו $m = 2$.
- ב. ישר העובר דרך הנקודה $A(0, -4)$ ושיפועו $m = \frac{1}{3}$.
- ג. ישר העובר דרך הנקודה $A(5, 9)$ ושיפועו $m = 0$.
- ד. ישר העובר דרך הנקודות $A(5, -12)$ ו- $B(6, -6)$.
- ה. ישר העובר דרך הנקודה $A(-6, 4)$ ומקביל לישר : $y = 2x - 3$.
- ו. ישר העובר דרך הנקודה $A(3, -5)$ ומקביל לציר ה- y .
- ז. ישר העובר דרך הנקודה $A(-7, -3)$ ומאונך לישר : $y = x + 3$.
- ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים : $y = 11x - 4$ ו- $y = 3x - 12$ ומקביל לישר : $y = 7x + 5$.

תשובות סופיות:

- (27) א. $y = 2x + 1$ ב. $y = \frac{1}{3}x - 4$ ג. $y = 9$ ד. $y = 6x - 42$
- ה. $y = 2x + 16$ ו. $x = 3$ ז. $y = -x - 10$ ח. $y = 7x - 8$

שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר:

שאלות:

28) במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.

ידוע כי: $A(3, -2)$, $B(2, 4)$, $D(-2, 2)$.

א. כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.

ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.

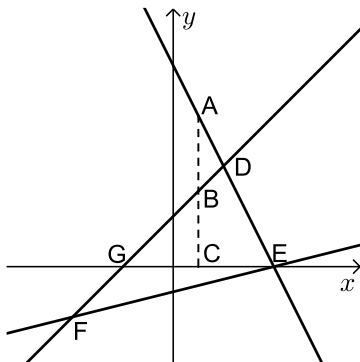
ג. כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

29) נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים $A(-9, 1)$ ו- $B(5, -7)$.

משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x + 3y + 6 = 0$.

א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.

ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.



30) שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים

בשרטוט: $x - y + 2 = 0$, $x - 4y - 4 = 0$, $2x + y - 8 = 0$.

הקטע AC מקביל לציר ה- y .

א. חשב את שטח המשולש DEF.

ב. נתון: $d_{BC} = 3$.

חשב את אורך הקטע AB.

31) BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד $A(-6, 1)$.

משוואת התיכון BD היא $x - y = 1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x + 5y = 67$.

מצא את שיעורי הקדקוד C.

32) נתון טרפז ABCD ($AB \parallel CD$) ובו משוואת השוק BC היא: $x = 2$.

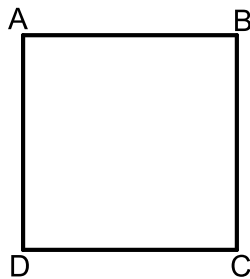
משוואת הבסיס CD היא $2x + 3y = 7$ וידוע כי $A(-4, 1)$.

א. מצא את משוואת הבסיס AB.

ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו- C.

ג. מעבירים את האלכסון AC.

הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.



33 במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3

ושיעורי הנקודה A הם: (1, 4).

א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?
הראה חישוב מתאים.

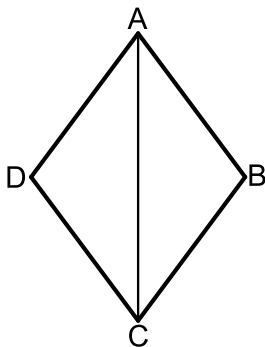
ב. נתון גם: $D(4, 13)$, $m_{CD} = -\frac{1}{3}$ ו- $\sqrt{90}$ ס"מ $BC =$.

איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ג. נתון גם: $B(-8, 7)$.

איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.



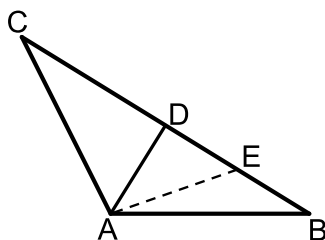
34 המרובע ABCD הוא מעוין.

ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: (0, 6).

כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא: $y = -1.5x + 6$ ואחת ממשוואות הצלעות היא: $5y + x = 4$.

א. מצא את משוואת האלכסון השני.

ב. מצא את שאר קדקודי המעוין.



35 המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).

ב- $\triangle ABC$ מעבירים את הגובה AD לבסיס BC

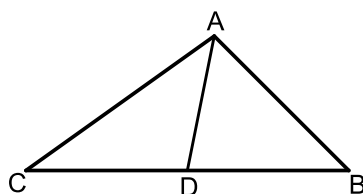
ומסמנים נקודה E כך שמתקיים: $DE = BE$.

קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון

כי: $D(5, 7)$, $E(8.5, 2.5)$.

א. מצא את שיעורי שאר קדקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.



36 נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC

של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו

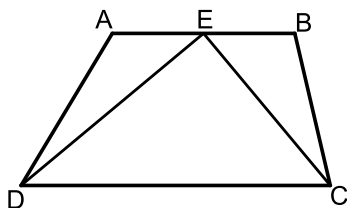
לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD.

הצלע BC מונחת על הישר: $y = 4$ וידוע כי

שיעור ה- x של הנקודה C הוא: $x_C = -1$.

כמו כן נתון: $A(7, 8)$, $m_{AB} = -2$.

- א. מצא את משוואת הצלע AB.
 ב. ענה על הסעיפים הבאים:
 i. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?
 ii. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.
 ג. ענה על הסעיפים הבאים:
 i. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.
 ii. איזה משולש הוא המשולש ABC?



37 המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע

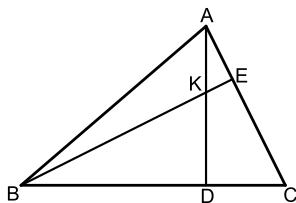
הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה- x .

שיעורי הנקודה B הם $(3, 2)$ והצלע AD מונחת

על הישר: $x = -5$. אורך הקטע DE הוא $\sqrt{80}$

כך ש- $\angle DEC = 90^\circ$.

- א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-D.
 ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.
 ג. מצא את שיעורי הנקודה C.
 ד. חשב את שטח המשולש DEC.



38 AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC

במשולש ABC.

ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: $(1, 3)$.

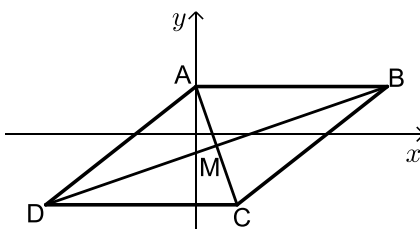
שיעורי הנקודות D ו-E הם: $D(-2, 4)$, $E(3, 5)$.

- א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.
 ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.
 ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.
 ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.

39 נתון מעוין ABCD. ידוע כי הצלע CD מונחת על $y = -7$.

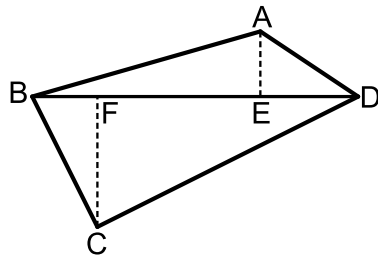
אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים

בנקודה: $M(-0.5, -3)$. שיפוע האלכסון AC הוא -4.



- א. מצא את משוואת האלכסון AC.
 ב. מצא את שיעורי הנקודה C.
 ג. חשב את שטח המשולש BMC.

(40) נתון מרובע ABCD שקודקודיו הם: $A(3,13)$, $B(-2,4)$, $C(9,3)$, $D(8,14)$.



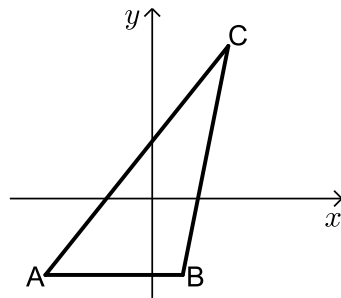
מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.

א. מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.



(41) על הישר $y = -5$ מסמנים את

הנקודות: $A(-7,-5)$, $B(2,-5)$.

הנקודה C נמצאת על הישר: $y = x - 5$.

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה C ב-t.

א. הבע באמצעות t את שיעור ה-y של הנקודה C.

ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.

הבע באמצעות t את המרחקים של C מ-A ומ-B.

ג. מצא את t ואת אורך הצלע BC.

ד. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB.

ידוע כי D נמצאת ברביע השלישי.

מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח

המשולש DAC יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.

(42) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = BC$)

ובו נתון: $A(-4,12)$, $B(x,6)$ ו- $C(4,8)$.

א. מצא את x.

ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת הצלע AC.

ii. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-y ב-D.

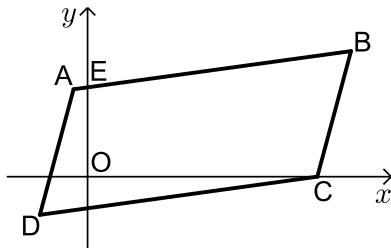
מצא את שיעורי הנקודה D.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא נקודה E ברביע הראשון ($x_E < 5$) כך שהמשולש DCE יהיה גם

שווה שוקיים וישר זווית ($\angle C = 90^\circ$).

ii. חשב את יחס השטחים בין המשולשים: $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$.



(43) באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.

ידועים קודקודי המקבילית הבאים: $A(-1, y)$

ו- $B(x, 4)$. x ו- y נעלמים).

שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא: $d_{CD} = \sqrt{104}$.

א. מצא את x ו- y אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה- x בחלקו החיובי

וכי: $d_{BC} = \sqrt{17}$. מצא את שיעורי הקדקוד C (מצא שתי אפשרויות).

ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- y ב- E.

שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש. מצא את האפשרות הנכונה עבור

הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

תשובות סופיות:

$$(28) \quad \text{א. } y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5} \quad \text{ב. } C(-6, 0) \quad \text{ג. } y = -\frac{2}{9}x - \frac{4}{3}$$

$$(29) \quad \text{א. } l_{BD}: y = 3x - 22 \quad \text{ב. } l_{BC}: y = -\frac{1}{8}x - 6\frac{3}{8}$$

$$(30) \quad \text{א. } 18 \text{ יח"ש } S_{EDF} \quad \text{ב. } 3 \text{ יחידות אורך } AB$$

$$(31) \quad C(14, 5)$$

$$(32) \quad \text{א. } y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \quad \text{ב. } B(2, -3), C(2, 1) \quad \text{ג. } 12 \text{ יחידות שטח } S_{ABC}$$

(33) א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.

ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.

ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות. ד. 90° יח"ש S .

$$(34) \quad \text{א. } y = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3} \quad \text{ב. } (5, 5), (4, 0), (-1, 1)$$

$$(35) \quad \text{א. } B(12, -2), C(-2, 16) \quad \text{ב. } y = -8x$$

$$(36) \quad \text{א. } y = -2x + 22 \quad \text{ב. i. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווים}$$

$$\text{שטח הוא תיכון. ב. ii. } B(9, 4), D(4, 4)$$

$$\text{ג. ii. } AD = 5, BC = 10 \quad \text{ג. ii. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה}$$

למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

$$(37) \quad \text{א. } D(-5, -8), A(-5, -2), E(-1, 0) \quad \text{ב. } CE: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, CD: y = \frac{1}{2}x - 5\frac{1}{2}$$

$$\text{ג. } C(5, -3) \quad \text{ד. } 30 \text{ יח"ש } S_{DEC}$$

$$(38) \quad \text{א. } AD: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}, AC: y = -x + 8 \quad \text{ב. } A(7, 1)$$

$$\text{ג. } BE: y = x + 2, BC: y = 3x + 10 \quad \text{ד. } B(-4, -2)$$

$$(39) \quad \text{א. } y = -4x - 5 \quad \text{ב. } C(0.5, -7) \quad \text{ג. } 34 \text{ סמ"ר } S_{BMC} = S_{DMC}$$

$$(40) \quad \text{א. } d_{BD} = \sqrt{200}, y = x + 6 \quad \text{ב. } E(5, 11), F(3, 9)$$

$$\text{ג. } d_{CF} = \sqrt{72}, d_{AE} = \sqrt{8} \quad \text{ד. } S_{ABCD} = 80$$

$$(41) \quad \text{א. } C(t, t-5) \quad \text{ב. i. } AC = \sqrt{2t^2 + 14t + 49}, BC = \sqrt{2t^2 - 4t + 4}$$

$$\text{ii. } 10 \text{ ס"מ } BC, t = 8 \quad \text{ג. } D(-20, -5)$$

$$(42) \quad \text{א. } x = -2 \quad \text{ג. i. } y = -0.5x + 10 \quad \text{ii. } D(0, 10) \quad \text{ד. i. } E(2, 4)$$

$$\text{ii. } \frac{S_{DCE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}$$

$$(43) \quad \text{א. } x = 9, y = 2 \quad \text{ב. } C(8, 0), C(10, 0) \quad \text{ג. } C(8, 0)$$

חלוקת קטע ביחס נתון:

סיכום כללי:

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_p = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}, y_p = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}$ (בהצלבה).

שאלות:

- (1) הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון: $A(2, -5)$, $B(-12, 16)$.

$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5} \text{ כי אם נתון כי } \frac{AP}{PB} = \frac{2}{5}.$$

- (2) קודקודי משולש ABC הם: $A(-1, 3)$, $B(6, 0)$, $C(4, -12)$.

מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

- (3) מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC

שקודקודיו הם: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

- (4) קודקודי המשולש ABC הם: $A(5, 1)$, $B(7, -3)$, $C(-1, 4)$.

מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקודקוד A.

תשובות סופיות:

$$M(3, -3) \quad (2)$$

$$P(-2, 1) \quad (1)$$

$$1.697 \text{ יחידות אורך.} \quad (4)$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) \quad (3)$$

מרחק נקודה מישר:

סיכום כללי:

הצגה כללית של ישר ומרחקים:

- הצגה כללית של ישר (צורה סתומה): $Ax + By + C = 0$.
- מרחק הנקודה $A(x_1, y_1)$ מהישר $Ax + By + C = 0$ הוא: $d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$.
כאשר $B > 0$:

- אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
- אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

שאלות:

(5) ענה על הסעיפים הבאים:

- מצא את מרחק הנקודה $(-2, 4)$ מהישר $4x + 3y + 11 = 0$.
- מצא את מרחק הנקודה $(4, 3)$ מהישר $y = 3x - 1$.
- מצא את מרחק הנקודה $(3, -11)$ מהישר $x - 5 = 0$.

(6) מצא את המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון:

- $3x - 4y + 6 = 0$, $A(-5, -1)$ ב. $12x + 5y - 17 = 0$, $A(-3, 8)$
- $2y + 7 = 0$, $A(11, -2)$ ד. $3x - 14 = 0$, $A\left(6, -\frac{1}{2}\right)$

(7) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $x + y - 7 = 0$ שמרחקן מהישר $2x - y + 5 = 0$ הוא: $\sqrt{20}$.

(8) מצא את שטחה של מקבילית ששיעורי קודקודיה

הם: $A(7, -1)$, $B(-5, 4)$, $C(-1, 7)$, $D(11, 2)$.

- (9) מצא את שטחו של המשולש $\triangle ABC$ שבו שיעורי קדקוד A הם $A(5, -3)$ ושניים מתיכוני המשולש מונחים על הישרים $x - 4 = 0$ ו- $2x - y - 1 = 0$.
- (10) מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם: $A(2, 2)$, $B(-1, 1)$, $C(-5, -2)$.
- (11) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $3x - 2y + 6 = 0$, שמרחקן מהישר: $2x - y - 14 = 0$ הוא $3\sqrt{5}$.
- (12) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $4x + 3y - 20 = 0$, שמרחקן מהישר: $3x + 2y + 13 = 0$ הוא $2\sqrt{13}$.

תשובות סופיות:

- (5) א. 3 ב. $\frac{8}{\sqrt{10}}$ ג. 2
- (6) א. 1 ב. 1 ג. $1\frac{1}{2}$ ד. $1\frac{1}{3}$
- (7) $(4, 3)$, $\left(-2\frac{2}{3}, 9\frac{2}{3}\right)$
- (8) $S_{ABCD} = 56$ יח"ש
- (9) $S_{ABC} = 18$ יח"ש
- (10) $S_{ABC} = 2.5$ יח"ש
- (11) $(4, 9)$, $(64, 99)$
- (12) $(-1, 8)$, $(-157, 216)$

מיקום נקודה ביחס לישר:

שאלות:

(13) מצא את שיעורי הנקודה על הישר $3x - 2y + 6 = 0$, שמרחקה מהישר: $2x - y - 14 = 0$ הוא $3\sqrt{5}$ והיא נמצאת מתחתיו.

(14) מצא את שיעורי הנקודה על הישר $4x + 3y - 20 = 0$, שמרחקה מהישר: $3x + 2y + 13 = 0$ הוא $2\sqrt{13}$ והיא נמצאת מעליו.

(15) נתון משולש ABC שבו נתונים הקודקודים: $A(1,1)$, $B(13,6)$. הקדקוד C נמצא על הישר $2x - y - 19 = 0$ ונמצא מתחת לצלע AB. מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.

(16) נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:
 $I: x + 2y + 1 = 0$, $II: x - 2y - 11 = 0$, $III: 2x - y + 6 = 0$
 מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ושמרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.

(17) מצא את שיעורי מרכז המעגל, החסום במשולש, שצלעותיו מונחות על הישרים: $I: 4x - 3y + 2 = 0$, $II: 3x - 4y - 51 = 0$, $III: 3x + 4y - 11 = 0$.

(18) מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה $G(7, -3)$ נמצאת מתחתיו ובמרחק $2\sqrt{10}$ ממנו.

(19) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-2, 6)$ ומרחקו מהנקודה $B(2, 9)$ הוא $\sqrt{5}$.

(20) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(9, 10)$ ומרחקו מהנקודה $B(8, -3)$ הוא $5\sqrt{5}$.

(21) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(3, 6)$ ומרחקו מהנקודה $B(-9, 2)$ הוא 4.

- (22) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(1,2)$ ומרחקו מהנקודה $B(-3,10)$ הוא 4.
- (23) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(10,8)$ ומרחקו מהנקודה $B(7,-1)$ הוא 3.
- (24) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-6,1)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,7)$ הוא 10.

תשובות סופיות:

- | | |
|--|--|
| (-1,8) (14) | (64,99) (13) |
| (-1,-4) (16) | $C(11,3)$ (15) |
| $y = 3x - 4$ (18) | (2,-5) (17) |
| $y = -\frac{22}{31}x + 16\frac{12}{31}$, $y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$ (20) | $y = 2x + 10$, $y = \frac{2}{11}x + 6\frac{4}{11}$ (19) |
| $x = 1$ או $y = -\frac{3}{4}x + 2\frac{3}{4}$ (22) | $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{3}{4}$, $y = 6$ (21) |
| $y = -\frac{4}{3}x - 7$ (24) | $x = 10$ או $y = 1\frac{1}{3}x - 5\frac{1}{3}$ (23) |

מרחק בין ישרים מקבילים:

סיכום כללי:

- מרחק בין שני ישרים מקבילים: $Ax + By + C_1 = 0$ ו- $Ax + By + C_2 = 0$ כאשר: $B > 0$

$$\text{הוא: } d = \left| \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \text{ ומתקיים בהעדר הערך המוחלט:}$$

- אם: $C_1 > C_2$, $(d > 0)$ אז הישר $Ax + By + C_1 = 0$ מתחת ל- $Ax + By + C_2 = 0$.

- אם: $C_1 < C_2$, $(d < 0)$ אז הישר $Ax + By + C_1 = 0$ מעל ל- $Ax + By + C_2 = 0$.

שאלות:

(25) מצא משוואת ישר, המקביל לישר $3x - 4y + 8 = 0$ ונמצא במרחק 4 ממנו.

(26) מצא את המרחק בין הישרים המקבילים: $5x + 12y - 14 = 0$, $5x + 12y + 25 = 0$.

(27) נתונים הישרים: $y = 6x + 5$, $12x - 2y - 15 = 0$. הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

(28) נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן $AB: 3x + y = 0$ ו- $CD: 3x + y - 6 = 0$. הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע AB ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

(29) צלע של ריבוע מונחת על הישר $3x - 2y + 5 = 0$. אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $B(1, -1)$. מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

(30) נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי. מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות $P(4, 1)$ ו- $Q(7, 2)$ וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא $3\sqrt{10}$.

(31) במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר $x - y + 3 = 0$ והצלע BP מונחת על הישר $x + 2y + 3 = 0$. אורך הגובה לצלע BP הוא $3\sqrt{5}$ ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

תשובות סופיות:

$$(25) \quad 3x - 4y + 28 = 0, \quad 3x - 4y - 12 = 0 \quad (26) \quad 3$$

$$(27) \quad \frac{25}{\sqrt{148}} \quad (28) \quad 14.4 \text{ יח"ש} = S, \quad (2.1, -3.3)$$

$$(29) \quad 3x - 2y - 15 = 0, \quad y = -\frac{2}{3}x - 3\frac{2}{3}, \quad y = -\frac{2}{3}x + 3$$

$$(30) \quad y = 3x \quad (31) \quad P\left(2, -2\frac{1}{2}\right)$$

חדוא 2

פרק 36 - גיאומטריה אנליטית - המעגל

תוכן העניינים

269	1. הכרות עם משוואת המעגל
273	2. מעגל המשיק לצירים
275	3. משיק למעגל
276	4. שאלות יסודיות שונות
(ללא ספר)	5. נושאים מתקדמים במעגל
283	6. כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע
284	7. משוואות המשיקים למעגל
286	8. מיתר המחבר שתי נקודות השקה
287	9. שאלות מסכמות שונות

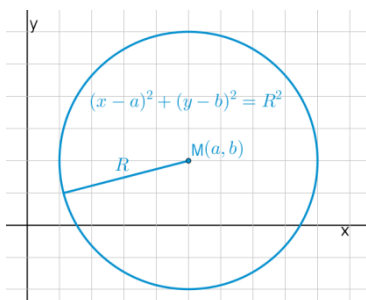
הכרות עם משוואת המעגל:

סיכום כללי:

הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.

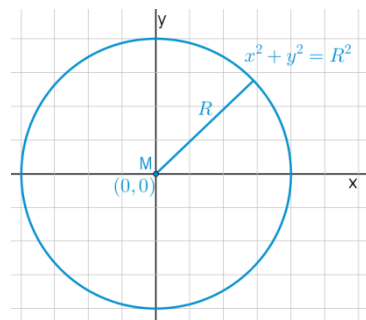
משוואת מעגל:



משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $M(a, b)$

ורדיוסו R היא: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

משוואת מעגל קנוני:



משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים $M(0, 0)$)

ורדיוסו R היא: $x^2 + y^2 = R^2$.

שאלות:

(1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$

ב. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 10$

ג. $(x-m)^2 + (y+n)^2 = m^2 + n^2$

(2) כתוב את משוואות המעגלים שמרכזם M ורדיוסם R :

א. $M(-3, 5), R=10$

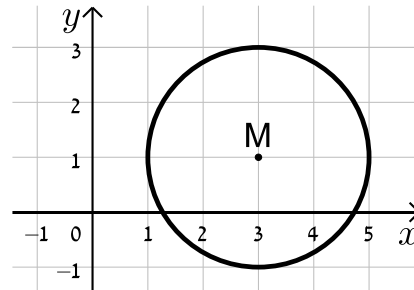
ב. $M(4, -2), R=3$

ג. $M(10, -12), R=\sqrt{30}$

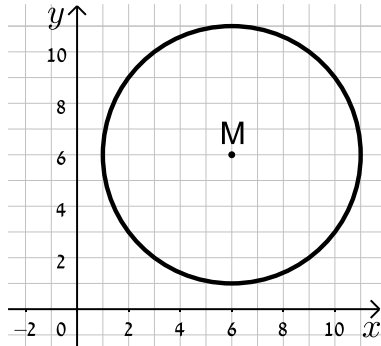
ד. $M(5, 5), R=\sqrt{40}$

3) כתוב את משוואות המעגלים הבאים בכל מקרה:

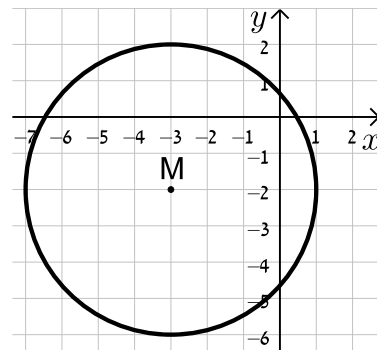
א.



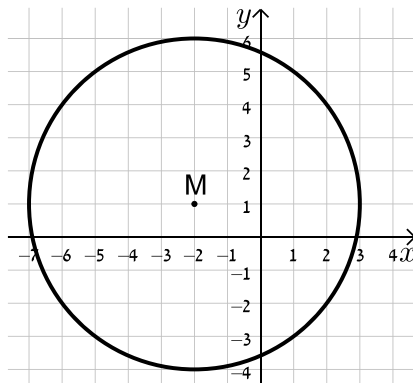
ב.



ג.



ד.



4) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(-4, 5)$ ומרכזו בנקודה $O(2, -1)$.

5) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(-5, 6)$ והוא חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 9$.

6) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(0, -7)$ והוא חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 3$.

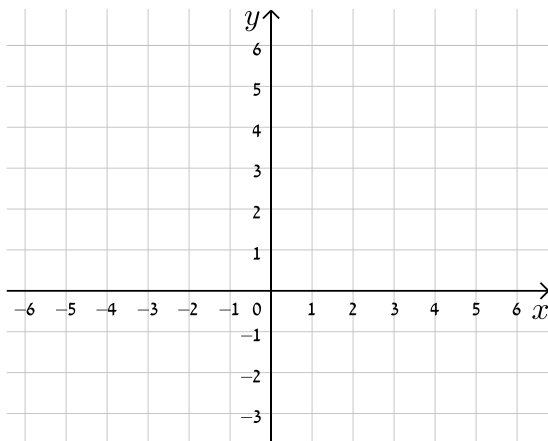
7) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(11, 2)$, רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר $y = 2x - 1$.

8) מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות $A(-2, 3)$ ו- $B(4, -3)$ הן קצות הקוטר שלו.

(9) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר $x = 4$, רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה- x מיתר שאורכו 12.

(10) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו $M(4, -3)$ אם ידוע כי הישר $y = -3x + 7$ חותך אותו בשתי נקודות A ו-B כך שאורכו של המיתר AB הוא 4 יחידות אורך.

(11) מצא את משוואתו של מעגל החוסם משולש שקודקודיו הם $A(22, -24)$, $B(-10, 40)$, $C(-30, 28)$.



(12) נתונים שני מעגלים בעלי אותו המרכז $M(3, -1)$, האחד הוא בעל רדיוס R והשני בעל רדיוס של $2R$.
א. כתוב את המשוואות של שני המעגלים (בטא באמצעות R).
ב. מה תהיינה המשוואות עבור $R = 2$?
ג. צייר את שני המעגלים במערכת הצירים שלפניך.

(13) שני מעגלים שמרכזיהם $M_1(6, 2)$ ו- $M_2(-3, -4)$ חותכים זה את זה בנקודה $(-2, 3)$. מצא את משוואות המעגלים.

(14) נתונה משוואת המעגל הבאה: $x^2 + y^2 - 10x - 10y + a = 0$ כאשר a פרמטר.
א. מצא ביטוי של רדיוס המעגל באמצעות a .
ב. איזה מהערכים הבאים יכול להיות הגיוני עבור a ?
נמק ומצא את תחום ההגדרה של a .
i. $a = 5$
ii. $a = 55$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad M(3, -5), R = 7 \quad \text{א.} \quad M(-0.5, 0), R = \sqrt{10} \quad \text{ב.}$$

$$\text{ג.} \quad M(m, -n), R = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

$$(2) \quad \text{א.} \quad (x-4)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad \text{ב.} \quad (x+3)^2 + (y-5)^2 = 100$$

$$\text{ג.} \quad (x-5)^2 + (y-5)^2 = 40 \quad \text{ד.} \quad (x-10)^2 + (y+12)^2 = 30$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad \text{ב.} \quad (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25$$

$$\text{ג.} \quad (x+3)^2 + (y+2)^2 = 16 \quad \text{ד.} \quad (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

$$(4) \quad M(3, -3), (x-2)^2 + (y+1)^2 = 72$$

$$(5) \quad (x+5)^2 + (y-6)^2 = 232$$

$$(6) \quad x^2 + (y+7)^2 = 100$$

$$(7) \quad (x+1)^2 + (y+3)^2 = 169 \quad \text{או} \quad (x-7.8)^2 + (y+14.6)^2 = 169$$

$$(8) \quad (x-1)^2 + y^2 = 18$$

$$(9) \quad (x-4)^2 + (y-8)^2 = 100 \quad \text{או} \quad (x-4)^2 + (y+8)^2 = 100$$

$$(10) \quad (x-4)^2 + (y+3)^2 = 4\frac{2}{5}$$

$$(11) \quad (x+2)^2 + (y-4)^2 = 1360$$

$$(12) \quad \text{א.} \quad (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4R^2, (x-3)^2 + (y+1)^2 = R^2$$

$$\text{ב.} \quad (x-3)^2 + (y+1)^2 = 16, (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$$

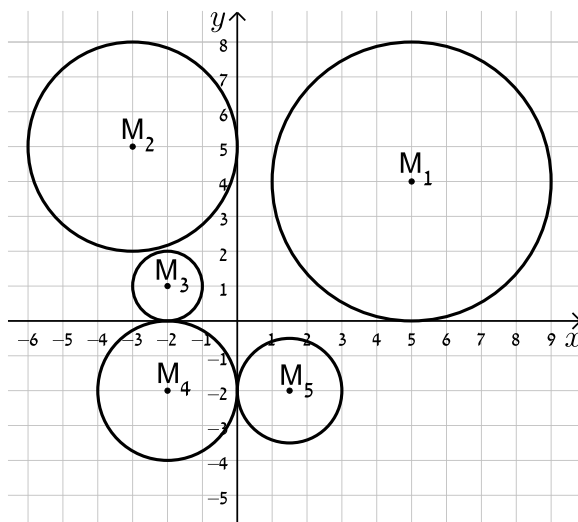
$$(13) \quad (x-6)^2 + (y-2)^2 = 65, (x+3)^2 + (y+4)^2 = 50$$

$$(14) \quad \text{א.} \quad R = \sqrt{50-a} \quad \text{ב.} \quad a = 5, a < 50$$

מעגל המשיק לצירים:

שאלות:

15) כתוב את משוואות המעגלים הבאים:



16) מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

17) מצא את משוואת המעגל שמשיק לציר ה- x ומרכזו בנקודה $M(16, 8)$.

18) מצא את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על הישר $2x + 3y + 6 = 0$ והוא משיק לשני הצירים.

19) מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לציר ה- y ולישר $y = 6$ ומרכזו על הישר $y = 3x - 2$ ברביע הראשון.

תשובות סופיות:

$$M_1 : (x-5)^2 + (y-4)^2 = 16, M_2 : (x+3)^2 + (y-5)^2 = 9 \quad (15)$$

$$, M_3 : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1, M_4 : (x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$. M_5 : (x-1.5)^2 + (y+2)^2 = 2\frac{1}{4}$$

$$. (x \pm 4)^2 + (y \pm 4)^2 = 16 \quad (16)$$

$$. (x-16)^2 + (y-8)^2 = 64 \quad (17)$$

$$. \left(x+1\frac{1}{5}\right)^2 + \left(y+1\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}, (x-6)^2 + (y+6)^2 = 36 \quad (18)$$

$$. (x-2)^2 + (y-4)^2 = 4 \quad (19)$$

משיק למעגל:

סיכום כללי:

משוואת המשיק למעגל $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליו היא: $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = R^2$.

שאלות:

(20) מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ בנקודות על המעגל שבהן $y = 5$.

(21) נתונה משוואת המעגל: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$ ומשוואת הישר $y = 2x + m$ כאשר m פרמטר. מצא עבור אלו ערכים של m הישר ישיק למעגל ולאילו ערכים הישר יחתוך את המעגל.

תשובות סופיות:

(20) $4x - 3y + 35 = 0$ ו- $4x + 3y = 27$.

(21) משיק: $-9, -11, m$, חותך: $-9 < m < 11$.

שאלות יסודיות שונות:

שאלות:

(22) נתון מעגל שמשוואתו $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
 ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה- x .
 מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א'
 ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

- (23) נתון ישר שמשוואתו $y = 2x - 10$. הישר חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B. בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה C. מצא את אורך הקטע BC.

- (24) נתון המעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 81$. מסמנים ב-A את נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה- x . הנקודה A היא מרכזו של מעגל נוסף בעל רדיוס של 12. מסמנים את נקודות החיתוך של שני המעגלים ב-B ו-C. מצא את שטח המשולש שנוצר בין הנקודות B, C ו-O (ראשית הצירים).

- (25) נתון ישר שמשוואתו $y = x$. הישר חותך מעגל קנוני שמשוואתו $x^2 + y^2 = 32$ בשתי נקודות, A ו-B, כאשר A ברביע הראשון. בנקודה A עובר מעגל נוסף, המשיק למעגל הקנוני ובעל אותו רדיוס. מצא את משוואת המעגל הנוסף ואת משוואת המשיק המשותף לשני המעגלים העובר בנקודה A.

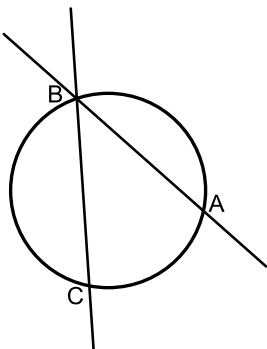
- (26) הישרים: $9y + 11x = 94$ ו- $y = -3x + 14$ נחתכים בנקודה B.

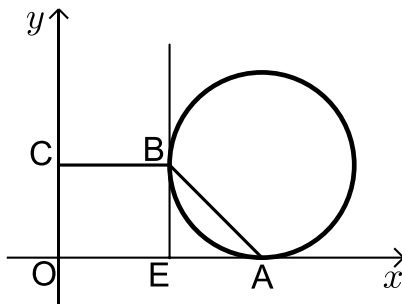
דרך נקודה זו עובר מעגל שמרכזו הוא: $M(-9, 1)$.

ידוע כי מעגל זה חותך את הישרים (חוץ מהנקודה B) בשתי נקודות A ו-C (ראה איור).

- א. מצא את שיעורי הנקודה B.
 ב. מצא את משוואת המעגל.

- ג. מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של הישר שמשוואתו: $y = -3x + 14$ עם המעגל.





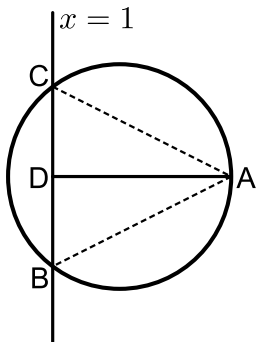
- (27)** נתון מעגל המשיק לציר ה- x בנקודה A .
מהנקודה E שעל ציר ה- x מעלים אנך המשיק
למעגל בנקודה B (ראה איור).
הקטע BC מקביל לציר ה- x ו- O היא נקודת
ראשית הצירים. יוצרים טרפז ישר זווית $ABCO$
ששטחו הוא 170 סמ"ר.
ידוע כי: $C(0,10)$ ו- $AE = 10$ ס"מ.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

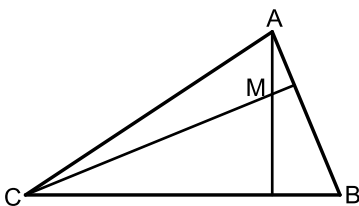
i. מצא את שיעורי הנקודה B .

ii. מצא את שיעורי הנקודה A .

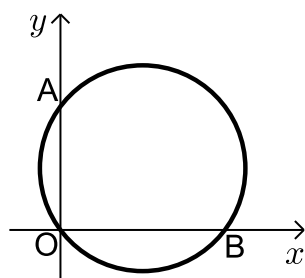
ב. כתוב את משוואת המעגל.



- (28)** הנקודה $A(17,4)$ נמצאת על המעגל
שמשוואתו: $(x-7)^2 + (y-4)^2 = R^2$.
הישר $x=1$ חותך את המעגל בשתי נקודות B ו- C כך
ש- B נמצאת ברביע הרביעי. מעבירים את הקטע AD
המאונך לישר BC וידוע כי הנקודה D היא אמצע BC .
א. מצא את רדיוס המעגל.
ב. מצא את שיעורי הנקודות B ו- C .
ג. ענה על הסעיפים הבאים:
i. חשב את מרחק הנקודה A מהישר $x=1$.
ii. חשב את שטח המשולש ABC .



- (29)** נתון משולש ABC . משוואות הצלעות AB ו- BC
במשולש ABC הן בהתאמה: $2y - x = 56$
ו- $8y + x = 104$.
מעבירים גבהים לצלעות AB ו- BC אשר
נחתכים בנקודה $M(0, -2)$ שבתוך המשולש.
א. מצא את משוואות הגבהים.
ב. מצא את שיעורי הנקודה B .
ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M
ורדיוסו הוא הקטע BM .



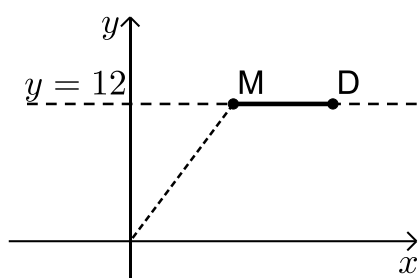
(30) באיור שלפניך מתואר המעגל: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

המעגל חותך את הצירים בנקודות A, B ו-O.

- מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
- מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע הראשון כך שהמרובע ABCO יהיה מלבן.
- חשב את היקף המלבן.

(31) המעגל: $(x+a)^2 + (y-1)^2 = a+4$, $a > 0$ חותך את ציר ה-x בנקודה שבה: $x=1$.

- מצא את a.
- מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.
- כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.
- חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.



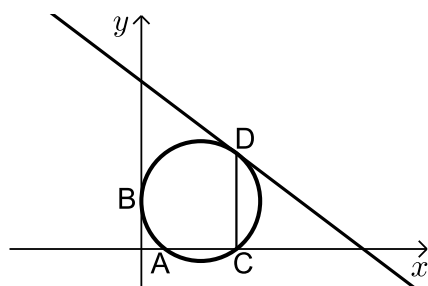
(32) הנקודות M ו-D נמצאות על הישר $y=12$ ידוע כי שיעור

ה-x של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של הנקודה M מראשית הצירים גדול ב-6 מהמרחק בין הנקודות M ו-D (ראה איור).
בונים מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו הוא האורך DM.

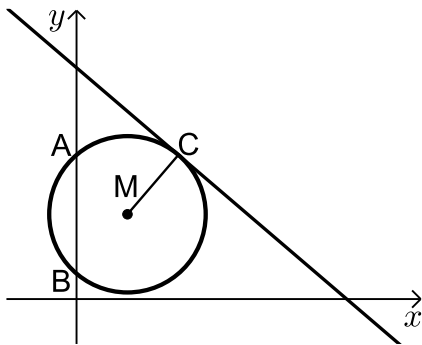
- ענה על הסעיפים הבאים:
- i. מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.
- ii. מצא את שיעור ה-x של הנקודה D.
- כתוב את משוואת המעגל.
- האם המעגל הזה חותך את הצירים? הראה חישוב מתאים לטענתך.

(33) מעגל שמרכזו בנקודה M(15,12) משיק לציר ה-y

בנקודה B וחותך את ציר ה-x בשתי נקודות A ו-C כמתואר באיור.



- כתוב את משוואת המעגל.
- מהנקודה C מעלים אנך לציר ה-x שחותך את המעגל בנקודה נוספת D.
- דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.
- מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
- מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.



34 באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M.

המעגל חותך את ציר ה- y בנקודות A ו-B.

מעבירים משיק למעגל: $6x + 7y = 191$

דרך הנקודה: $C(12, 17)$.

א. כתוב את משוואת הרדיוס MC.

ב. ידוע כי הנקודה M נמצאת על הישר $y = 10$.

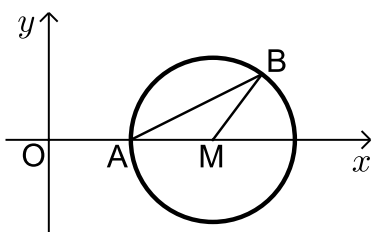
i. מצא את שיעורי הנקודה M.

ii. מצא את אורך רדיוס המעגל.

iii. כתוב את משוואת המעגל.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- y .

ד. חשב את שטח המשולש AMB.



35 באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M הנמצאת על

ציר ה- x . המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה A.

מסמנים את ראשית הצירים ב-O.

ידוע כי A היא אמצע הקטע MO ושיעוריה הם: $A(5, 0)$.

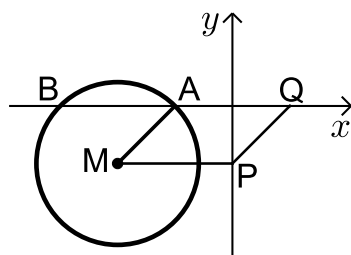
א. מצא את משוואת המעגל.

ב. כתוב את משוואת הישר שעובר דרך הנקודה A ושיפועו הוא 0.5.

ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של הישר שמצאת עם המעגל.

ד. סמן את הנקודה שמצאת בסעיף הקודם ב-B וחשב

את שטח המשולש AMB.



36 באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו

$$(x+4)^2 + (y+2)^2 = 8$$

מסמנים את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- x

ב-A ו-B (ראה איור).

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

מעבירים אנך לציר ה- y מנקודת מרכז המעגל M

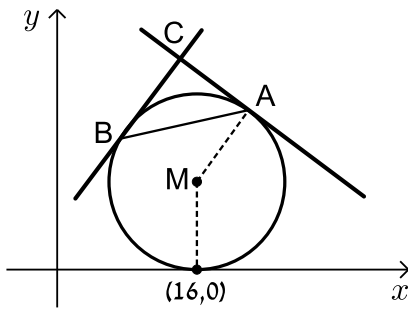
ומסמנים את חיתוכם ב-P.

ב. מצא נקודה Q כך שהמרובע AMPQ יהיה מקבילית. נמק.

ג. כתוב את משוואת הישר PQ.

ד. הוכח כי הישר שמצאת בסעיף הקודם משיק למעגל

בנקודה $(-2, -4)$.



37 נתון מעגל שרדיוסו R ($R < 16$) ומשיק לציר ה- x

בנקודה שבה: $x = 16$.

א. הבע באמצעות R את משוואת המעגל וציין האם הוא חותך את ציר ה- y או לא. נמק.

מהנקודה $A(22,18)$ שעל המעגל מעבירים משיק.

ב. מצא את R וכתוב את משוואת המעגל.

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל בנקודה A .

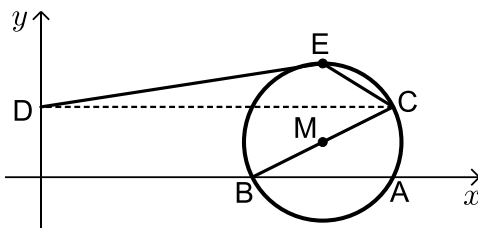
ד. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה B שבה $x_B < x_M$

אם ידוע כי הוא המאונך למשיק הקודם.

ה. המשיקים נחתכים בנקודה C .

i. מצא את שיעורי הנקודה C .

ii. מצא את שטח המשולש ABC .



38 באיור שלפניך נתון מעגל

שמשוואתו: $(x+a)^2 + (y-1)^2 = 5$, פרמטר a .

ידוע כי המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה $A(10,0)$.

א. מצא את a אם ידוע כי $a > -10$.

ב. מצא את הנקודה B - נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה- x .

ג. כתוב את משוואת הקוטר העובר דרך הנקודה B ומרכז המעגל M .

ד. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הקוטר עם המעגל.

ה. מעבירים אנך מנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם לציר ה- y בנקודה D .

הנקודה E היא הנקודה בעלת שיעור ה- y הגדול ביותר על המעגל.

מחברים את הנקודות D ו- E כך שנוצר המחומש $DECBO$. חשב את שטחו.

39 באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו: $(x-5)^2 + (y-3)^2 = R^2$, רדיוס המעגל.

ידוע כי המעגל עובר בראשית הצירים.

א. מצא את רדיוס המעגל

וכתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את הנקודות A ו- B - החיתוך של

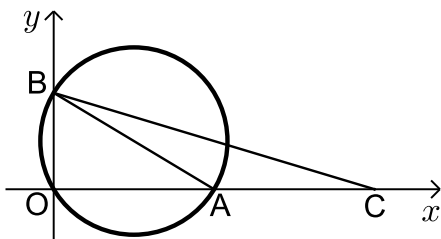
המעגל עם הצירים (ראה איור).

ג. מסמנים נקודה C על ציר ה- x

כך ש- A היא אמצע הקטע CO .

i. מצא את שיעורי הנקודה C .

ii. חשב את שטח המשולש ABC .



תשובות סופיות:

(22) א. $(0, -8)$, $(0, 0)$, $(6, 0)$ ב. 27 יח"ש.

(23) 12.5 יחידות אורך.

(24) $S_{ABOC} = \sqrt{80}$ יח"ש.

(25) $y = -x + 8$, $(x - 8)^2 + (y - 8)^2 = 32$

(26) א. $(2, 8)$ ב. $(x + 9)^2 + (y - 1)^2 = 170$ ג. $(4, 2)$.

(27) א. i. $B(12, 10)$ ii. $A(22, 0)$ ב. $(x - 22)^2 + (y - 10)^2 = 100$

(28) א. $R = 10$ ב. $B(1, -4)$, $C(1, 12)$ ג. i. $d = 16$

ii. $S = 128$

(29) א. $y = 8x - 2$, $y = -2x - 2$ ב. $(-24, 16)$ ג. $x^2 + (y + 2)^2 = 900$

(30) א. $O(0, 0)$, $A(0, 6)$, $B(8, 0)$ ב. $C(8, 6)$ ג. 28 יח"ש P .

(31) א. $a = 1$ ב. $(0, -1)$, $(-2, 3)$ ג. $y = -2x - 1$

ד. $S = \frac{1}{4}$

(32) א. i. $d = 15$ ii. $x = 18$ ב. $(x - 9)^2 + (y - 12)^2 = 81$

ג. המעגל אינו חותך את ציר ה- x - כאשר מציבים ב- y אפס מתקבלת משוואה ריבועיתללא פתרון. המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה אחת- $(12, 0)$.

(33) א. $(x - 15)^2 + (y - 12)^2 = 225$ ב. $C(24, 0)$, $D(24, 24)$ ג. $y = -\frac{3}{4}x + 42$

(34) א. $y = \frac{7}{6}x + 3$ ב. i. $M(6, 10)$ ii. $\sqrt{85}$

iii. $(x - 6)^2 + (y - 10)^2 = 85$ ג. $A(0, 17)$, $B(0, 3)$ ד. 42 יח"ש.

(35) א. $(x - 10)^2 + y^2 = 25$ ב. $y = 0.5x - 2.5$ ג. $B(13, 4)$

ד. 10 יח"ש S_{AMB} .

(36) א. $A(-2,0)$, $B(-6,0)$ ב. $Q(2,0)$ ג. $y = x - 2$

(37) א. $(x-16)^2 + (y-R)^2 = R^2$, המעגל אינו חותך את ציר ה- y .

ב. $(x-16)^2 + (y-10)^2 = 100$, $R=10$ ג. $y = -\frac{3}{4}x + 34\frac{1}{2}$

ד. $y = \frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$ ה. $C(14,24)$ ii. 50 יח"ש.

(38) א. $a = -8$ ב. $B(6,0)$ ג. $y = 0.5x - 3$

ד. $(10,2)$ ה. $11 + 5\sqrt{5}$ יח"ש $S_{\text{DECB}} =$

(39) א. $\sqrt{34}$ יחידות אורך $R =$, $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 34$ ב. $A(10,0)$, $B(0,6)$

ג. $C(20,0)$ i. ii. 30 יח"ש $S_{\text{ABC}} =$

כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע:

שאלות:

- (1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:
- א. $x^2 + 10x + y^2 + 6y - 2 = 0$ ב. $x^2 - 2x + y^2 + 20y + 1 = 0$
- ג. $x^2 - 8x + y^2 - 14y = 0$ ד. $x^2 + y^2 + 2y = 0$
- ה. $x^2 + x + y^2 - 3\frac{3}{4} = 0$ ו. $x^2 - 2mx + y^2 + 6my + m^2 = 0$

- (2) משוואתו של מעגל היא $x^2 + y^2 - 6mx - 2(m+2)y + 4m + 4 = 0$. מצא את ערכו של m אם ידוע שמרכז המעגל נמצא על הישר $y = 2x + 7$.

- (3) משוואתו של מעגל היא $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 48 = 0$. מצא את אורכו של המיתר שחותך הישר $y = 2x - 4$ מהמעגל בלי למצוא את נקודות הקצה של המיתר.

תשובות סופיות:

- (1) א. $M(-5, -3), R = 6$ ב. $M(1, -10), R = 10$
- ג. $M(4, 7), R = \sqrt{65}$ ד. $M(0, -1), R = 1$
- ה. $M\left(-\frac{1}{2}, 0\right), R = 2$ ו. $M(m, -3m), R = 3m$

(2) $m = -1$

(3) $2\sqrt{80}$

משוואות המשיקים למעגל:

שאלות:

- (4) מצא משוואת מעגל העובר בנקודה $(1,8)$ המשיק לשני הצירים.
- (5) מצא את אורך המשיק למעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 37 = 0$ היוצא מהנקודה $A(10, -3)$.
- (6) מצא את משוואת המשיק ואת משוואת הנורמל למעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$ בנקודה $A(5, -4)$.
- (7) מצא את נקודת החיתוך של המשיקים למעגל שמשוואתו $x^2 + (y-1)^2 = 5$ בנקודות שבהן $x = -1$.
- (8) נתון מעגל שמרכזו בנקודה $(-2, 6)$ והוא עובר בראשית הצירים. המעגל חותך את הצירים בשתי נקודות נוספות, A ו-B.
א. הוכח כי המשיקים למעגל בנקודות A ו-B מקבילים זה לזה.
ב. הוכח את סעיף א' בלי למצוא את משוואות המשיקים או את שיפועיהם.
- (9) נתון המעגל $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$ והישר $y = 2x + m$.
לאילו ערכים של הפרמטר m הישר משיק למעגל ולאלו ערכים של m הישר חותך את המעגל?

תשובות סופיות:

$$(4) \quad (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25 \text{ או } (x-13)^2 + (y-13)^2 = 169.$$

$$(5) \quad 8.$$

$$(6) \quad \text{משיק: } y = 3x - 19, \text{ נורמל: } x + 3y + 7 = 0.$$

$$(7) \quad (-5, 1).$$

$$(8) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(9) \quad \text{משיק: } m = -9, 11, \text{ חותך: } -9 < m < 11.$$

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

סיכום כללי:

משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים

למעגל $(x-a)^2 = (y-b)^2 = R^2$ היוצאים מהנקודה $A(x_1, y_1)$ שמחוץ

למעגל היא: $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = R^2$.

שאלות:

10) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$,

המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-3, 8)$

ב. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2 + (y-1)^2 = 5$, המחבר

את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-5, 1)$.

11) נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 16x + 48 = 0$ ונקודה P, שנמצאת על החלק

החיובי של ציר ה-y. הישר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים

היוצאים למעגל מנקודה P חותך את ציר ה-y בנקודה Q. נתון: $PQ = 14$.

מצא את שיעורי הנקודה Q.

תשובות סופיות:

10) א. $x - 4y + 11 = 0$ ב. $x = -1$

11) $Q(0, -8)$ או $Q(0, -6)$.

שאלות מסכמות שונות:

שאלות:

12 נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 16x - 12y + 64 = 0$. המעגל משיק מבחוץ למעגל קנוני. מצא את משוואת המעגל הקנוני, את נקודת ההשקה בין המעגלים ואת משוואת המשיק המשותף העובר בנקודה זו.

13 המעגלים $x^2 + y^2 + 22x - 6y = m$ ו- $x^2 + y^2 = 26$ נחתכים בזווית ישרה. מצא את ערכו של m .

14 בטרפז שווה שוקיים ABCD נתון כי הבסיס הגדול, DC, מונח על הישר: $3x - y - 9 = 0$ והשוק AD מונחת על הישר $x + y - 3 = 0$. שיעורי הקודקוד B הם $(3, -8)$. מצא את משוואת המעגל החוסם את הטרפז ABCD.

15 מצא את משוואתו של מעגל החוסם ריבוע, שאחד מקדקודיו נמצא בראשית הצירים ומשוואת אחד מאלכסוניו היא $3x - y + 10 = 0$.

תשובות סופיות:

12 $x^2 + y^2 = 16$, $A(-3.2, 2.4)$, $4x - 3y + 20 = 0$

13 $m = -26$

14 $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 20$

15 $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10$

חדוא 2

פרק 37 - גיאומטריה אנליטית - האליפסה והפרבולה

תוכן העניינים

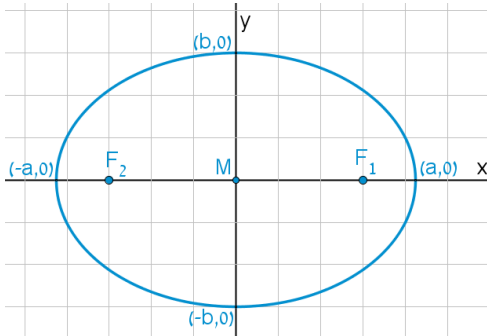
288	1. האליפסה.....
292	2. הפרבולה.....

האליפסה:

סיכום כללי:

הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.



מושגים באליפסה:

- הציר הגדול: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- x .
- הציר הקטן: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- y .
- מרכז האליפסה: מפגש צירי האליפסה (ראה איור).
באליפסה קנונית מרכז האליפסה נמצא בראשית הצירים.
- מוקדי האליפסה: שתי נקודות קבועות שבעבורן סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה הוא גודל קבוע השווה ל- $2a$. המוקדים יסומנו ב- F_1 ו- F_2 ושיעוריהם הם: $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$.
- רדיוסי ווקטור: המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים.
אורך הרדיוס מנקודה (x,y) שעל האליפסה למוקד הימני הוא: $r_1 = a - \frac{cx}{a}$.
אורך הרדיוס מנקודה (x,y) שעל האליפסה למוקד השמאלי הוא: $r_2 = a + \frac{cx}{a}$.
- מיתר: קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.
- קוטר: מיתר העובר דרך מרכז האליפסה.

משוואות וקשרים:

- משוואת אליפסה קנונית היא: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ או $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
- הקשר בין הפרמטרים של האליפסה הוא: $a^2 - b^2 = c^2$.
- מכפלת שיפועי מיתר באליפסה והקוטר החוצה אותו היא קבועה ושווה ל- $-\frac{b^2}{a^2}$.

שאלות:

- (1) מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה $x^2 + 4y^2 = 36$.
- (2) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא $2\sqrt{3}$.
- (3) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה $8\sqrt{2}$.
- (4) מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה $(-3\sqrt{3}, 2)$.
- (5) מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 16$ ומוקד אחד שלה הוא בנקודה $(\sqrt{10}, 0)$.
- (6) מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, -2\sqrt{5})$ והמרחק בין המוקד הימני לקדקוד הימני בה הוא 2.
- (7) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות $(-2, \sqrt{6})$ ו- $(\sqrt{14}, 1)$.
- (8) מצא על האליפסה $3x^2 + 4y^2 = 144$ את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.
- (9) מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה $(-3, 1)$ ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.
- (10) מצא על האליפסה $x^2 + 3y^2 = 12$ את הנקודות שמהן רואים את הקטע שבין שני המוקדים בזווית ישרה.

(11) מצא את משוואתו של קוטר באליפסה $x^2 + 4y^2 = 50$ ששיפועו חיובי ואורכו $\sqrt{56}$.

(12) נתונים האליפסה $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ והישר $y = 2x + k$. מצא לאלו ערכים של הפרמטר k הישר משיק לאליפסה ולאלו ערכים של הפרמטר k הישר חותך את האליפסה.

(13) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $3x^2 + 5y^2 = 120$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

(14) מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

(15) באליפסה $5x^2 + 9y^2 = 90$ חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.

(16) באליפסה $x^2 + 5y^2 = 16$ חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קדקודיו האחרים.

(17) באליפסה חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה וקדקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- y .

מצא את משוואת האליפסה אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה $(4\sqrt{2}, 0)$.

(18) מצא באליפסה $2x^2 + 3y^2 = 12$ משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא $(1.5, 1)$.

(19) ישר שמשוואתו $x - y - 3 = 0$ חותך מאליפסה מיתר שאמצעו בנקודה $(2, -1)$. מצא את משוואת האליפסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2\sqrt{2}, -2)$.

$$(20) \text{ נתונה המשוואה } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 25} = 1, (0 < a \neq 5).$$

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. לאיזה ערך של a המשוואה מייצגת מעגל?

ii. לאלו ערכים של a המשוואה מייצגת אליפסה?

ב. הוכח כי בעבור $a = 4$ אין אף נקודה על האליפסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad 2a = 12, 2b = 6 \quad (2) \quad \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad (3) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$(4) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (5) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{6} = 1 \quad (6) \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

$$(7) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad (8) \quad (4, \sqrt{24}), (4, -\sqrt{24}), (-4, \sqrt{24}), (-4, -\sqrt{24})$$

$$(9) \quad \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (10) \quad (\sqrt{6}, \sqrt{2}), (-\sqrt{6}, \sqrt{2}), (\sqrt{6}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$$

$$(11) \quad y = \sqrt{6}x \quad (12) \quad \text{משיק: } k = \pm 12, \text{ חותך: } -12 < k < 12.$$

$$(13) \quad S = 60 \text{ יח"ש} \quad (14) \quad S = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2} \quad (15) \quad S = 26 \frac{2}{3} \text{ יח"ש}$$

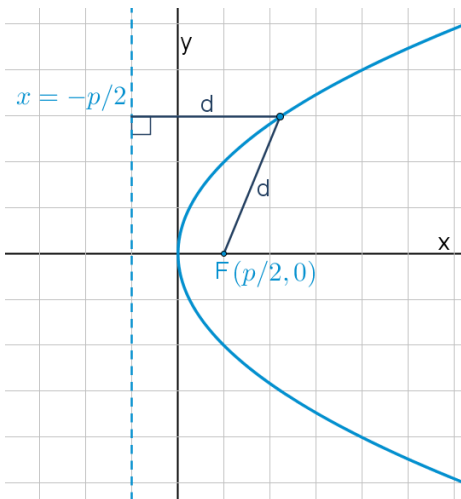
$$(16) \quad (1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3}) \quad (17) \quad \frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (18) \quad y = -x + 2.5$$

$$(19) \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad (20) \quad \text{א. i. } a = \sqrt{12.5} \quad \text{ii. } a \neq \sqrt{12.5}$$

הפרבולה:

סיכום כללי:

הגדרה:



המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה. הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.

מושגים בפרבולה:

- מוקד: נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה ממנה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.
- מדריך: ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.
- קדקוד הפרבולה: ראשית הצירים.
- רדיוס: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה: $r = x + \frac{p}{2}$.
- מיתר: קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה.
- קוטר (לא בחומר): ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (ציר ה- x אצלנו).

משוואת הפרבולה:

משוואת הפרבולה הקנונית היא: $y^2 = 2px$ כאשר p הוא פרמטר הפרבולה.

משיק לפרבולה:

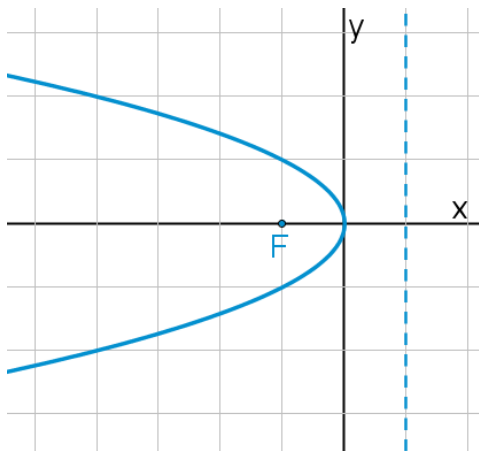
- משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_0, y_0)$ שעליה היא: $yy_0 = p(x + x_0)$.
- שיפוע המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_0, y_0)$ שעליה הוא: $m = \frac{p}{y_0}$.

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

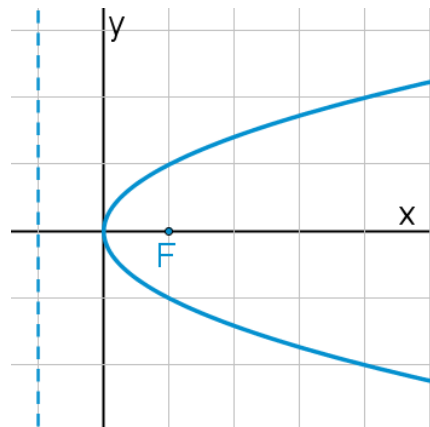
משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה $y^2 = 2px$ היוצאים מהנקודה $A(x_0, y_0)$ שמחוץ לפרבולה היא: $yy_0 = p(x + x_0)$.

תיאורים גרפיים:

פרבולה שמשוואתה $y^2 = -2px$:



פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$:



שאלות:

- (1) נתונה הפרבולה $y^2 = 18x$. מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.
- (2) מצא את משוואתה של פרבולה שהישר $x = -3$ הוא המדריך שלה.
- (3) מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך שלה הוא 5.

- (4) מצא את משוואתה של פרבולה שעוברת בנקודה $(-6, 9)$.
- (5) מצא את משוואתה של פרבולה שמוקדה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה $x^2 + 2y^2 = 18$.
- (6) מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 6x$ שמרחקן מהמוקד הוא 4.
- (7) מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 8x$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.
- (8) מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 2px$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.
- (9) מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2 = 10x$.
- (10) הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2 = 2px$.
- (11) נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו מונח על ציר ה- x , וקדקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגש תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.
- (12) את נקודה A שעל הפרבולה $y^2 = 20x$ חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה אנך למדריך. היקף הטרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה- x שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח הטרפז.
- (13) קצות מיתר בפרבולה $y^2 = 4x$ הם A ו-B. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה- x של נקודה A הוא 4.
- (14) מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2 = 16x$, שעובר בראשית הצירים ומרחקו מהמוקד הוא $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

(15) מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2 = 2x$, שאמצעו בנקודה $\left(1\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

(16) נתונה הפרבולה $y^2 = 4x$ והישר $y = 2x + k$, לאיזה ערך של k הישר משיק לפרבולה?

(17) נתונה הפרבולה $y^2 = 6x$.

א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות שבהן $x = 1.5$.

ב. הוכח שנקודת החיתוך של הנורמלים בנקודות אלה נמצאת על ציר ה- x .

(18) הנקודות A ו-B נמצאות על הפרבולה $y^2 = 12x$. נתון כי $y_A = 4$. מצא את שיעורי נקודה B אם ידוע שהמשיקים לפרבולה בנקודות הנתונות יוצרים זווית ישרה.

(19) נקודה A נמצאת על הפרבולה $y^2 = 28x$ ברביע הרביעי. אורך הנורמל לפרבולה מנקודה A עד לציר ה- x הוא $7\sqrt{5}$. מצא את משוואת הנורמל.

(20) מרחק המוקד של הפרבולה $y^2 = 8x$ ממשיק לה ששיפועו חיובי הוא $\sqrt{8}$. מצא את משוואת המשיק.

(21) נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. הבע באמצעות p את שיעורי הנקודה שעל הפרבולה ברביע הראשון, שמרחק המשיק בה ממוקד הפרבולה הוא p .

(22) נתונות שתי פרבולות: I. $y^2 = 6x$, II. $y^2 = 12x$. ישר שעובר בראשית הצירים חותך את הפרבולות בנקודות A ו-B. הראה כי המשיקים בנקודות A ו-B מקבילים.

(23) נתונה הפרבולה $y^2 = 14x$ והנקודה $(-1, -3)$, ממנה יוצאים שני משיקים לפרבולה. מצא את משוואת המיתר המחבר בין נקודות ההשקה.

(24) נתונה הפרבולה $y^2 = 18x$ ונקודה ברביע השלישי, ששיעור ה- x שלה קטן ב-1 משיעור ה- y שלה. מהנקודה יוצאים שני משיקים לפרבולה. המיתר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם הצירים משולש ששטחו 18. מצא את משוואת המיתר.

(25) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה $y^2 = 24x$ והוא משיק למדריך שלה.

(26) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה $(8,0)$ והוא משיק לפרבולה $y^2 = 10x$ בשתי נקודות.

(27) נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$ ומעגל שמרכזו על ציר ה- x והוא משיק לפרבולה מבפנים בשתי נקודות. הישר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם המשיקים בנקודות אלה משולש שווה צלעות. הבע באמצעות p את משוואת המעגל.

(28) הנקודה $A(2,3)$ נמצאת על פרבולה. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לפרבולה בנקודה A ומשיק לציר ה- y .

(29) נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$ שבה $p > 4$. הישר $x = 2$ חותך את הפרבולה בנקודות A ו- B . הבע באמצעות p את שיעורי קדקוד C של משולש $\triangle ABC$ שמוקד הפרבולה הוא מפגש האנכים האמצעיים בו, אם ידוע שקדקוד C נמצא על ציר ה- x .

(30) אליפסה שמשוואתה $x^2 + 4y^2 = 16$ חותכת את הפרבולה $y^2 = 2px$ בשתי נקודות. המרובע שקדקודיו הם נקודות החיתוך, מרכז האליפסה וקדקודה הימני של האליפסה הוא מעוין. מצא את משוואת הפרבולה.

תשובות סופיות:

- (1) $p = 9, F\left(4\frac{1}{2}, 0\right)$
- (2) $y^2 = 12x$
- (3) $y^2 = 10x$
- (4) $y^2 = 4x$
- (5) $y^2 = 12x$
- (6) $\left(2\frac{1}{2}, \sqrt{15}\right), \left(2\frac{1}{2}, -\sqrt{15}\right)$
- (7) $(1, \sqrt{8}), (1, -\sqrt{8})$
- (8) $\left(\frac{p}{4}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{p}{4}, -\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$
- (9) $S_{OAB} = 300\sqrt{3}$ יח"ש
- (10) $S_{ABO} = 12\sqrt{3}p^2$ יח"ש
- (11) $S_{ABC} = 3\sqrt{3}p^2$ יח"ש
- (12) $S_{ABCF} = 40\frac{5}{8}$ יח"ש
- (13) $B\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ או $B\left(\frac{1}{4}, -1\right)$
- (14) $y = -2x$ או $y = 2x$
- (15) $y = 2x - 2$
- (16) $k = \frac{1}{2}$
- (17) $y = x + 1\frac{1}{2}, y = -x - 1\frac{1}{2}$.א
- (18) $B\left(6\frac{3}{4}, -9\right)$
- (19) $y = \frac{1}{2}x - 7\frac{7}{8}$
- (20) $y = x + 2$
- (21) $A\left(\frac{3}{2}p, \sqrt{3}p\right)$
- (22) הוכחה.
- (23) $7x + 3y - 7 = 0$
- (24) $y = -9x + 18$
- (25) $(x - 6)^2 + y^2 = 144$
- (26) $(x - 8)^2 + y^2 = 55$
- (27) $\left(x - 2\frac{1}{2}p\right)^2 + y^2 = 4p^2$
- (28) $\left(x - 1\frac{1}{4}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{25}{16}$
- (29) $C(p + 2, 0)$
- (30) $y^2 = 1\frac{1}{2}x$

חדוא 2

פרק 38 - גיאומטריה אנליטית - ההיפרבולה

תוכן העניינים

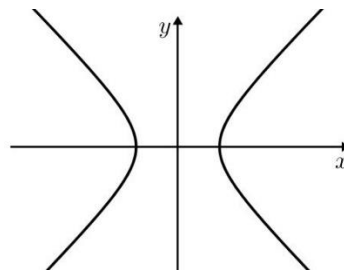
298	1. הגדרות יסודיות
299	2. הקשר בין הפרמטרים של היפרבולה
300	3. רדיוסים של היפרבולה
301	4. מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה
302	5. אסימפטוטות של היפרבולה

הגדרות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, שהפרש מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא היפרבולה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי ההיפרבולה.



- משוואת היפרבולה קנונית: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- היפרבולה שבה $a = b$, נקראת היפרבולה שוות שוקיים.
- הקשר בין הפרמטרים: $c^2 = a^2 + b^2$.

שאלות:

- (1) מצא את אורך צירי ההיפרבולה שמשוואתה $x^2 - 4y^2 = 36$.
- (2) מצא את משוואתה של ההיפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 18 ואורך צירה המדומה הוא $2\sqrt{3}$.
- (3) מצא את משוואתה של היפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 12 והמרחק בין מוקדיה הוא 20.

תשובות סופיות:

- (1) אורך הציר הממשי: 12, אורך הציר המדומה: 6.

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{3} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{80} = 1 \quad (3)$$

הקשר בין הפרמטרים של ההיפרבולה:

שאלות:

(4) מצא את משוואתה של ההיפרבולה שאורך צירה המדומה הוא $8\sqrt{5}$ והיא עוברת בנקודה $(-10, 3\sqrt{5})$.

(5) מצא משוואת ההיפרבולה שוות שוקיים שהמרחק בין מוקדיה הוא $\sqrt{200}$.

תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1 \quad (4)$$

$$x^2 - y^2 = 25 \quad (5)$$

רדיוסים של היפרבולה:

סיכום כללי:

רדיוסים באליפסה	רדיוסים בהיפרבולה
$r_1 = a - \frac{cx}{a}$	$r_1 = \left \frac{cx}{a} - a \right $
$r_2 = a + \frac{cx}{a}$	$r_2 = \left \frac{cx}{a} + a \right $

שאלות:

- (6) נתונה היפרבולה שמשוואתה: $6x^2 - y^2 = 18$. מצא על ההיפרבולה את הנקודות שמכפלת מרחקיהן מהמוקדים הוא 25.
- (7) נתונה היפרבולה שמשוואתה: $7x^2 - 9y^2 = 63$. מצא על ההיפרבולה את הנקודות שסכום ריבועי מרחקיהן מהמוקדים הוא $74\frac{8}{9}$.
- (8) נתונה היפרבולה שמשוואתה $4x^2 - y^2 = 20$. מצא נקודה על ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.
- (9) נתונה היפרבולה שמשוואתה $5x^2 - 4y^2 = 80$. מנקודה A שעל ההיפרבולה ברביע הראשון העבירו ישר מקביל לציר ה-x, החותך את הענף השמאלי של ההיפרבולה בנקודה B. את נקודה A חיברו עם המוקד הימני F_1 של ההיפרבולה ואת הנקודה B חיברו עם המוקד השמאלי של ההיפרבולה F_2 . נתון כי היקף הטרפז F_1BAF_2 הוא 29 יחידות אורך. מצא את שיעורי הנקודה A.

תשובות סופיות:

- (6) $(\pm 2, \pm \sqrt{6})$
- (7) $(\pm 4, \pm 2\frac{1}{3})$
- (8) $(3, -4)$
- (9) $(5, \frac{\sqrt[3]{5}}{2})$

מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה:

סיכום כללי:

מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה, היא: $\frac{a^2}{b^2}$.

שאלות:

(10) נתונה היפרבולה שמשוואתה $4x^2 - 3y^2 = 24$. מצא את משוואתו של מיתר בהיפרבולה, שהנקודה $(3, 4)$ היא אמצעו.

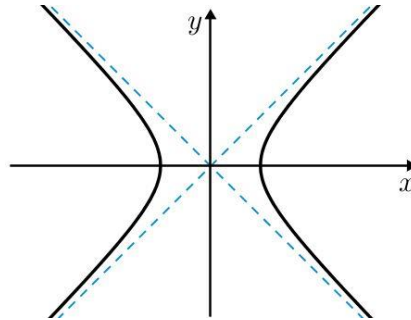
תשובות סופיות:

(10) $y = x + 1$

אסימפטוטות של היפרבולה:

סיכום כללי:

לכל היפרבולה יש שתי אסימפטוטות משופעות, שענפי ההיפרבולה שואפים אליהן.



- משוואות האסימפטוטות הן: $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$.

שאלות:

11 מצא את משוואת האסימפטוטות של היפרבולה שמשוואתה $4x^2 - y^2 = 48$.

12 הישר $y = -\frac{3}{4}x$ הוא אסימפטוטה של היפרבולה, שהמרחק בין מוקדיה הוא 20. מצא את משוואת ההיפרבולה.

13 נתונה היפרבולה שמשוואתה $9x^2 - 4y^2 = k$ ואורך צירה המדומה הוא 6. מצא נקודה על האסימפטוטה היורדת של ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

14 ישר שעובר בנקודה $(-6, 8)$ הוא אסימפטוטה של היפרבולה שעוברת בנקודה $(9, -8\sqrt{2})$.
 א. מצא את משוואת ההיפרבולה.
 ב. מצא את מרחק אחד ממוקדי ההיפרבולה מאחת האסימפטוטות שלה.

15 מוקדיה של היפרבולה שעוברת בנקודה $(4, -1)$ מתלכדים עם מוקדיה של אליפסה שמשוואתה $16x^2 + 25y^2 = 400$. מצא נקודה על הענף השמאלי של ההיפרבולה, שמרחקה מהאסימפטוטה העולה של ההיפרבולה הוא $1\frac{1}{3}$.

תשובות סופיות:

$$y = 2x, y = -2x \quad (11)$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1 \quad (12)$$

$$(2, -3) \quad (13)$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$\text{ב. } d = 4$$

$$\left(-3, \frac{1}{\sqrt{8}}\right) \quad (15)$$